Taller de Matemática

Ciclo de Inicio Universitario

Universidad
Nacional
de José C. Paz

COLECCIÓN MORRAL DE APUNTES

EDUNPAZ
Editorial Universitaria

Taller de Matemática

Taller de Matemática

Ciclo de Inicio Universitario

Universidad Nacional de José C. Paz

EDUNPAZ
Editorial Universitaria

Colección **Morral de Apuntes**

Universidad Nacional de José C. Paz
Taller de matemática / Universidad Nacional de José C. Paz. - 1a ed . - José C. Paz : Edunpaz, 2017.
108 p. ; 20 x 14 cm. - (Morral de apuntes)
ISBN 978-987-4110-02-2
1. Matemática. I. Título.
CDD 510

1ª edición, febrero de 2017

ISBN: 978-987-4110-02-2

Hecho el depósito legal que marca la ley 11723. Impreso en Argentina.

Publicación electrónica - distribución gratuita

Carta de bienvenida

Con gran alegría, hoy les damos la bienvenida a nuestra Universidad.

Desde 2011 José C. Paz cuenta con una universidad nacional en funcionamiento, que los recibe expectante y comprometida con el proceso educativo. Expectante, porque estamos interesados y dispuestos a ayudarlos a alcanzar sus deseos relacionados con la Educación Superior; y comprometida, con la sociedad y con ustedes en particular, porque hacemos el mayor esfuerzo por ofrecerles una propuesta académica de calidad, que los ayude a transitar este nuevo desafío con entusiasmo y responsabilidad.

Hasta hace algunos años, quienes vivíamos en José C. Paz debíamos realizar un largo viaje para acceder a estudios universitarios. El camino era solitario, no solo por la distancia, sino también por la circunstancia de tener que estudiar en un lugar que, al principio, resultaba extraño, que contemplaba las necesidades de los alumnos, pero no siempre de todos, y mucho menos de quienes veníamos de lugares más alejados.

Hoy los recibimos en José C. Paz en una institución nacional, pública y gratuita, que desde octubre de 2015 funciona con la plena autonomía que le confiere la Constitución Nacional y cuyo carácter democrático garantiza la elección de sus autoridades de manera periódica, con participación de todos los estamentos o claustros: los docentes, los trabajadores no docentes y también, por supuesto, ustedes, los estudiantes.

Quienes formamos parte de la UNPAZ entendemos que nuestra Universidad debe ser un espacio comprometido con su territorio, es decir, que participe activamente en la comunidad de José C. Paz y de los distritos vecinos y haga parte a su *pueblo de la vida universitaria. Estamos convencidos de que la Universidad debe ser inclusiva, entendiendo la inclusión no solo como el hecho de dar la posibilidad de que ustedes hoy ingresen a una carrera sino también con la responsabilidad que tenemos de utilizar todas nuestras energías para que puedan graduarse en un plazo razonable, de acuerdo al programa de cada carrera. Responsabilidad que, por supuesto, es compartida por autoridades, docentes y estudiantes. Solo así, aportando cada uno su granito de arena, podremos garantizar su derecho a la Educación Superior y el de la comunidad a beneficiarse del conocimiento de los profesionales (¡ustedes!) que, con su esfuerzo, contribuyó a formar.*

Esperamos que este camino que hoy eligen iniciar en la universidad pública los conduzca a convertirse en profesionales con nivel académico y responsabilidad social, comprometidos con los valores democráticos y la cultura nacional. Desde la UNPAZ, haremos todo lo que esté a nuestro alcance para acompañarlos en este recorrido.

Los saludo afectuosamente y les deseo un gran viaje en la aventura de la Educación Superior.

Federico G. Thea
Rector

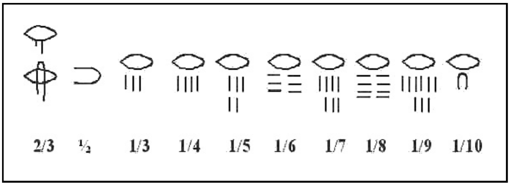
Índice

Unidad 1

Trabajar en matemática está asociado a resolver problemas. Resulta difícil imaginar cuáles fueron los primeros problemas que tuvieron que resolver los seres humanos. Sin embargo, no cabe duda de que al enfrentarse a variedad de situaciones, en algunas de ellas necesitaron, por ejemplo, utilizar números. La elaboración de calendarios para anticipar los tiempos de siembra y cosecha, los modos de registrar transacciones comerciales, la búsqueda de regularidades para predecir un fenómeno natural o la estimación de medidas para realizar una construcción pueden servir como ejemplos de ese trabajo numérico.

Claro que la construcción de las nociones matemáticas tal como hoy las conocemos, demandó siglos de trabajo, de grupos de personas que necesitaban resolver diferentes problemas. Podemos sostener, sin temor a equivocarnos, que gran parte del conocimiento matemático surge de la interacción de las personas entre sí y con su medio, para dar respuesta a problemas y necesidades de la vida en sociedad. Vale decir que la matemática se construye a partir de la resolución de problemas y son estos los que dan cuenta del tipo de quehacer que se pone en juego.

Tomemos, por ejemplo, el caso de las fracciones. Hace casi 4000 años, los babilonios ya las usaban, pero los que dieron impulso a estas nociones fueron los egipcios, que resolvían problemas de su vida diaria mediante operaciones con fracciones. La distribución de las raciones de pan, la manera de organizar el sistema de construcción de las pirámides y algunas medidas necesarias para dividir los campos luego de las crecidas del río Nilo, son claros ejemplos que surgen de las antiguas inscripciones que aparecen en el Papiro de Ahmes. Al igual que otras nociones matemáticas, las fracciones se originan para dar respuesta a la necesidad de resolver problemas prácticos.



Las fracciones según la representación de los egipcios

Con el uso por distintos grupos sociales y su estudio, surgen otros problemas. Sólo a modo de ejemplo, en el siglo VI D.C, los hindúes establecen las reglas de las operaciones con fracciones y en Europa, Leonardo de Pisa (matemático conocido como Fibonacci 1170-1250 d.C.) es quien propone en sus escritos la famosa barra con la que hoy representamos a las fracciones. Otro dato: recién a partir del año 1700 se generaliza el uso de la línea fraccionaria que usamos hoy.

Volviendo a nuestra apertura, debemos situar el quehacer matemático dentro de las actividades humanas y a la matemática como una obra, un producto cultural y social, en tanto depende de las concepciones de la sociedad y la época en la que surge, como resultado de la interacción de los grupos sociales. Desde esta perspectiva, la matemática es una obra abierta, en construcción y que evoluciona de manera permanente. Así que iniciemos el trabajo resolviendo un problema.

ACTIVIDAD 1

¿Qué tal si empezamos por algo muy cotidiano?, veamos algunas ofertas de los supermercados.

a) Al comprar un mismo producto en ambas cadenas, por ejemplo, paquetes de ½ kg de yerba, ¿cuál de las ofertas es más conveniente? ¿Por qué?

b) Tu respuesta anterior, ¿sirve para cualquier producto? ¿Y si necesitás comprar paquetes de pañales?

c) Si deciden hacer las compras para compartir el gasto entre tres personas, ¿se modifica en algo tu respuesta sobre cuál es más conveniente? ¿Por qué?

d) ¿Cómo convencés a tus compañeros de que estás en lo cierto? Buscá ejemplos que ayuden a entender tus respuestas.

1. De descuentos y otros porcentajes

El planteo de considerar la matemática como una obra cultural y social, quizás nos ubica de manera diferente a lo que quizás recordamos sobre nuestro paso por la escuela. Poder encontrar procedimientos propios para resolver un problema, poner en juego ideas y hacer suposiciones sobre cuáles pueden ser los mejores modos de resolver, debatir acerca de ellos, comprobar los resultados y poder comunicarlos, es decir, relacionarse con el quehacer matemático es lo que consideramos necesario para afrontar una carrera universitaria desde esta particular obra de conocimiento.

En muchas situaciones de la vida cotidiana se usan porcentajes para determinar un descuento en una compra o venta, el monto de un impuesto o cómo se incrementa por los intereses una cierta cantidad de dinero cuando se pide un crédito. En estos casos es común usar la calculadora, con el recaudo de poder controlar los resultados obtenidos.

ACTIVIDAD 2

Para hacer con la calculadora del celular.[1]

a) ¿Qué valores pensás que se observarán como resultado si se marcan los cálculos que aparecen en la primera columna de la tabla? Anotá lo que pensás como anticipación y después verificá con la calculadora.

1. Puede utilizarse cualquier celular que cuente con sistema operativo Android, o modelos anteriores.

	ANTICIPACIÓN	VERIFICACIÓN
120 x 40%		
120 + 40%		
120 ÷ 40%		
120 - 40%		

b) ¿Pensás que se obtienen los mismos resultados si se marcan los números en otro orden, por ejemplo 40 x 120% o 40 ÷ 120%? ¿Por qué?

c) Anotá los pasos que hay que seguir con tu calculadora para obtener[2]

- el **X** por ciento de una cantidad **Y**
- el resultado de realizar un descuento del **X** por ciento a una cantidad Y
- el resultado de aumentar en un **X** por ciento a una cantidad **Y**

d) Compará tus respuestas con las obtenidas por otros compañeros. Registren las conclusiones con las que hayan acordado entre todos.

ACTIVIDAD 3

Poné en juego las respuestas y conclusiones a las que llegaron en la siguiente situación.

Marca: Nokia
Código del producto:
LUMIA640B
Disponibilidad: En stock
Precio original $4999, oferta
$4399 en 12 cuotas de $366,58
Efectivo: $3799

a) ¿Cuál es el porcentaje de descuento del precio original?

b) ¿Y si el pago es en efectivo, cuál es el porcentaje de descuento?

c) ¿Qué significan estos valores? ¿Cuál es el valor que vas a pagar por el celular?

2. En esta actividad las letras X e Y toman los valores que quieras asignarle, para poder avanzar con las instrucciones necesarias para calcular porcentajes con la calculadora del celular.

En términos matemáticos, el porcentaje es una relación entre dos grupos de valores en donde se considera para uno de ellos, 100 unidades.
Por ejemplo, si sobre una compra de $ 140 realizan un descuento de $ 35, significa que cada $ 100 me descuentan $ 25.Porque 35/140 = 25/100, la razón entre el descuento y el valor original es de 25 en 100, o sea del 25%.
Otro ejemplo que puede servir es considerar que una taza de cereal de 40 g contiene 20 g de azúcar, o sea que la mitad es azúcar, que equivale a considerar que cada 100 g de cereal hay 50 g de azúcar; 20/40 = 50/100, es decir que la razón entre el peso del azúcar y el peso completo del cereal es del 50%.

ACTIVIDAD 4

Marcos y Juan estaban buscando descuentos en marcas deportivas cuando encontraron la promoción indicada en la imagen. A Marcos le pareció que había errores en los porcentajes que se indicaban ya que, según él: ***20% más el 35% no es el 48%.***

Pero Juan opinaba lo contrario, indicando que el equivocado era Marcos.

a) ¿Con quién estás de acuerdo? ¿Por qué?

¿Cómo se calcula el porcentaje de un descuento que se agrega a otro?

b) Completá la tabla de valores para uno de los descuentos, dando distintos importes de posibles compras, va un ejemplo considerando 40% + 35%, o sea 61%

c) Seleccioná otro de los descuentos y realiza una tabla similar a la del punto anterior.

d) Registrar los cálculos en una tabla, ¿te permite explicar a otra persona tus anteriores respuestas? ¿Por qué?

COMPRA EN $	1ER DESCUENTO DE 40%	A PAGAR DESPUÉS DEL 1ER DESCUENTO	2DO DESCUENTO DE 35%	DESCUENTO TOTAL	IMPORTE QUE SE PAGA
1000	400	600	210	610	390

e) Falta decir que es la empresa la que determina a qué productos le hace uno u otro descuento. ¿Qué criterios pensás que va a utilizar? ¿A qué productos le aplicará el mayor descuento? ¿Por qué?

Es conocido que, actualmente, nos llegan ofertas desde distintos medios para que consumamos tal o cual artículo, nos asociemos a determinada empresa de comunicaciones o bancaria, en base a proponernos paquetes de servicios que parecen muy ventajosos pero que es necesario estudiar si son convenientes o no, para poder explicar si estamos a favor o en contra de comprarlos o contratarlos.

ACTIVIDAD 5

a) Buscá en facturas de servicios, avisos en el diario, carteles de promoción en un banco, etc., expresiones en las que aparezcan porcentajes.

b) Anotá tres y explica qué significa cada expresión.

c) Identificá si la propuesta que se anuncia te resulta conveniente, indicando los motivos de tu elección.

2. Mezclas, relaciones entre magnitudes

En esta primera unidad comenzamos a transitar el camino para vincularnos con esta forma particular de quehacer matemático, donde la comunicación y los argumentos sobre lo producido son una parte fundamental, ya que dan cuenta de nuestra manera de pensar. De eso se trató al tener que calcular y comparar porcentajes, teniendo que decidir sobre la conveniencia de una propuesta comercial.

Ésta también es una perspectiva social y política. Se trata de desarrollar capacidades para situarse de forma activa frente al uso cada vez más frecuente de estadísticas, encuestas, índices, que abundan como argumento matemático en los discursos sociales.

Hasta aquí, nos ocupamos de trabajar con algunas nociones matemáticas ligadas a problemas de porcentajes/descuentos, avanzando en esta parte con equivalencias entre unidades de medida, que nos servirán para trabajar con las propiedades de la proporcionalidad directa y algunos de los conceptos asociados.

Los números naturales nos permiten contar los asistentes a un espectáculo, los nacimientos producidos durante el primer día del año, la producción de herramientas de una fábrica en un día, etc., pero para medir la longitud de una cuerda, el peso de un camión de cereales, la temperatura de un cuerpo se usan los números racionales. Para expresar estas cantidades se utiliza un número y una unidad de medida, por ejemplo: 2,7 metros, 4,5 toneladas, 12°.

$$\overbrace{\underset{\text{Medida}}{2{,}7}\qquad\qquad\underset{\text{unidad}}{\text{metros}}}^{\text{Cantidad}}$$

Para utilizar los términos adecuados, vamos a denominar magnitud a los atributos físicos que podemos medir. En 1960, la 11a Conferencia General de Pesas y Medidas estableció en París el Sistema Internacional de Medidas (SIM) que terminó de definirse en 1971 al considerar 7 magnitudes con su unidad fundamental. En la Argentina su uso se estableció en marzo de 1972 a partir de la Ley 19511 y lo conocemos con el nombre de Sistema Métrico Legal Argentino (SIMELA).

En el caso de las magnitudes longitud y masa este sistema tiene la misma estructura que el sistema decimal de numeración, dado que los cambios de unidades se realizan de 10 en 10. No ocurre lo mismo con las otras, que responden a otras relaciones

MAGNITUD	LONGITUD	TIEMPO	MASA	CORRIENTE ELÉCTRICA	TEMPERATURA	INTENSIDAD LUMINOSA	CANTIDAD DE SUSTANCIA
Unidad	metro	segundo	kilogramo	ampere	kelvin	candela	mol

1 centena = 10 decenas = 100 unidades 1 décimo = 10 centésimos = 100 milésimos
1hectómetro=10decámetros=100metros1decímetro=10centímetros=100milímetros

Entonces, para realizar una medición es necesario comparar la magnitud en relación con una unidad de medida. Por ejemplo, al medir la longitud de una cinta, podemos considerar como unidad el centímetro, o para establecer la capacidad de un recipiente, utilizar el litro. Así es posible asociar un número determinado a esa cantidad.

A continuación vamos a trabajar en otro contexto, relacionado con las ciencias naturales, donde las magnitudes y sus unidades de medida tienen aplicación. Las actividades que presentamos dan cuenta de la concentración de calcio[3] que poseen ciertos alimentos.

Por curiosidad,

-¿Sabés cuál es el valor diario recomendado que debemos consumir de calcio? ¿Y cuáles son los alimentos que proporcionan mayor cantidad de calcio?

-Una vez consumido, al ser necesario para la salud, ¿cómo se hace para no eliminarlo?

ACTIVIDAD 6

La Organización Mundial de la Salud (OMS) aconseja a las personas de 9 a 18 años consumir 1.300 mg de calcio por día para tener huesos sanos y fuertes, ¿les recuerda alguna publicidad?

Para conocer la concentración de calcio que poseen determinados alimentos se presenta a continuación la siguiente tabla:

ALIMENTOS	Gramos de alimento	Contenido en Calcio (mg)
Carne vacuna	20	3
Acelga/espinaca	20	24
Almendra	10	25
Lentejas	10	20

3. Se llama concentración de calcio a la cantidad de miligramos (mg) de calcio por cada gramo de alimento.

a) Considerá distintas porciones de estos alimentos, ¿cuántos miligramos de calcio aportan?

- un churrasco de carne vacuna de 180 gramos,
-una porción de tarta que contiene 225 gramos de acelga,
- un puñado de almendras de 25 gramos
- otros que se te ocurran

b) ¿Cuántos miligramos de calcio contiene cada gramo de alimento de la imagen que se presenta? ¿Por qué están expresados considerando 100 g de alimento?

c) ¿Con qué debemos alimentarnos para cumplir con lo indicado por la OMS? Hacé una propuesta para la dieta de un día para una persona en el rango de edad indicado.

ACTIVIDAD 7

La próxima tabla muestra la cantidad de calcio que contienen diferentes lácteos, dando valores aproximados extraídos del Comité Nacional de Endocrinología de la Sociedad Argentina de Pediatría:

a) Realizá los cálculos necesarios para seleccionar pares de lácteos que tengan mayor concentración de calcio, por ejemplo: leche descremada y yogur fortificado, o yogur entero y leche descremada. Explicá tu elección.

LÁCTEOS	Gramos	Contenido en Calcio (mg)
Leche entera	250	275
Leche descremada	200	240
Leche fortificada	100	184
Yogur entero	160	240
Yogur descremado	120	195
Yogur fortificado	200	625

b) Compará qué lácteo tiene mayor concentración de calcio:

- leche descremada y yogur descremado
- leche entera y leche descremada

c) ¿Qué tuviste en cuenta para realizar las comparaciones?

ACTIVIDAD 8

Al resolver la actividad anterior, es posible utilizar fracciones para expresar la concentración de calcio (mg) por cada gramo de lácteo. Por ejemplo, **24/16** expresa que el yogur entero tiene **24 mg de calcio por cada 16 gramos de alimento**.

a) ¿Es equivalente a 3/2, o sea que 2 gramos de yogur entero contienen 3 mg de calcio? ¿Cómo explicarías tu respuesta?

b) Indicá cuáles de las siguientes expresiones corresponden a los lácteos de la tabla anterior. No olvides explicar por escrito cómo te diste cuenta.

3/2; 120/100; 97/60; 25/8; 195/120;
275/250; 13/8; 312/100; 6/5; 11/10.

c) Al establecer la relación entre las concentraciones de calcio y las fracciones, estuviste comparando estas expresiones. A modo de ejercitación, trabajando en el contexto exclusivamente matemático, ordená de menor a mayor las siguientes expresiones e indicá qué tuviste en cuenta al hacerlo.

3/2 3/4 6/8 6/12 2/5 10/6

Hasta aquí, utilizamos la relación que existe entre la cantidad de calcio y el peso en determinados alimentos, a modo de ejemplo, para trabajar con los números racionales en el contexto de la proporcionalidad; esto se muestra al recuperar las distintas maneras de responder las preguntas a partir del uso y comparación de estos números. Al reflexionar sobre los contenidos matemáticos, podemos decir que la concentración de calcio es un cociente (resultado de una división) cuyo resultado es un número racional, ya sea expresado como una fracción o como una expresión decimal. Por ejemplo, en el caso del yogur entero, 3/2 indica que hay 3 mg de calcio por cada 2 g de yogur o, usando una expresión decimal, 1,5 mg de calcio por cada 1 g de yogur.

En general, se pueden mencionar tres posibles estrategias matemáticas utilizadas en la resolución:

- "regla de tres simple"

Por ejemplo, si en 20 g de carne vacuna hay 3 mg de calcio, en 180 g corresponde:

X = 180. 3 / 20 = 27, es decir, 27 mg de calcio

- recurrir a las propiedades de la proporcionalidad: "el doble, con el doble", "la tercera parte con la tercera parte", "a la suma de los elementos de una de las magnitudes (cantidad de alimento) le corresponde la suma de sus correspondientes de la otra (cantidad de calcio)"

Usando el mismo ejemplo, como 180 es 9 veces 20, entonces la cantidad de calcio correspondiente a 180 g de carne es igual a 3 mg . 9 = 27 mg

- averiguar el valor de la unidad.

Esto significa que el procedimiento tuvo en cuenta que si 20 g contienen 3 mg de calcio, para averiguar cuánto calcio contiene 1 g de carne hay que realizar la división 3/20.

Las situaciones de proporcionalidad directa dan la posibilidad de trabajar con estrategias diferentes para un mismo problema, pero exigen la capacidad de organizar información y se relacionan, por ejemplo, con:

-las operaciones de multiplicar y dividir,

-las tablas y reglas de cálculo,

-las equivalencias entre unidades de medida,

-el factor de escala, los gráficos estadísticos, con los que vamos a trabajar más adelante,

-la geometría vinculada con la semejanza,

-las equivalencias químicas,

-las definiciones de unidades compuestas tales como densidad, velocidad y/o aceleración,

Y otras cuestiones que seguramente encontrarán en las materias de sus respectivas carreras.

-Cuáles de los conceptos recién mencionados recordás? Puede ser útil revisar algunos libros o apuntes de la escuela secundaria.

Intentá escribir el significado de alguno de los conceptos anteriores, quizás dando ejemplos.

Indicá otro ejemplo que relaciones con situaciones de proporcionalidad.

Para poder avanzar, vamos a recuperar algunos de estos conceptos, a partir de su estudio matemático, brindando ejemplos que permitan reconocerlos. Es importante aclarar que cuando se define y ejemplifica un concepto, esto sólo da cuenta de un recorte particular, de una posible manera de abordarlo.

I.-La *razón* entre dos cantidades **a y b** es un número **R**, tal que a = R x b, es decir, el número que expresa la razón entre una cantidad y otra tomada como unidad es la medida de la primera respecto de la segunda.

Por ejemplo, la razón entre la cantidad de lentejas (en mg) con respecto a la cantidad de calcio (también en mg) es de 2 mg en 1000 mg, ya que la concentración en 100 g de lentejas es de 200 mg de calcio.

Otro ejemplo, la superficie de un cuadrado de papel glasé con respecto de la superficie de un cuadradito de 1 cm de lado es 100. Esto es porque la superficie de un cuadrado de papel glasé = 10 x 10 y la superficie de un cuadrado de 1 cm de lado = 1 cm^2

El valor de la cantidad es el producto de la medida (100) por la unidad adoptada (1 cm2)

1 dm2 = 100 cm2

II.-Proporción numérica

Los números *a, b, c* y *d* forman una proporción si la razón entre *a* y *b* es la misma que entre *c* y *d*.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Por ejemplo: 3/7 y 9/21 forman una proporción, ya que la razón entre 3 y 7 es la misma que la razón[4] entre 9 y 21. Es decir 3/7 = 9/21

En $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ hay cuatro términos; *a* y *d* se llaman extremos, *c* y *b* se llaman medios.

En toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios, esto es lo que explica la manera en que resolvemos algunos problemas de proporcionalidad, usando la llamada "regla de tres".

En general

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{d}} \Rightarrow \mathbf{a.d = b.c}$$

En los números del punto anterior 3/7 = 9/21 se cumple que el producto de los extremos 3 x 21 = 63 y el producto de los medios 7 x 9 = 63, son iguales.

También puede servir como ejemplo, la estrategia usada para calcular la cantidad de calcio en 180 g de carne vacuna, 3/20 = X /180

X = 180. 3 / 20 = 27, es decir, 27 mg de calcio

III.-Cantidades DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Ya abordamos distintas situaciones en donde trabajamos con cantidades directamente proporcionales, por ejemplo:

-de compra y venta de productos, al determinar el precio a partir del peso del producto o de la cantidad de unidades;

-al establecer la concentración de un elemento según el peso de un alimento.

En estos casos al doble, triple... de una cantidad corresponde el doble, triple... de la otra, y si se realiza el cociente entre las cantidades que se corresponden se obtiene un mismo número. Decimos que esas cantidades son directamente proporcionales o que están vinculadas a través de una relación de proporcionalidad directa.

Si las cantidades de la siguiente tabla se corresponden de forma directamente

4. De ser necesario, volvé a leer lo escrito sobre *razón*, en el punto anterior. Son conceptos asociados.

proporcional, entonces deben cumplirse las equivalencias que figuran a continuación

X	Y
a	e
b	f
c	g
d	h

a/e =b/f=c/g=d/h

Dos valores cualesquiera de una columna y sus correspondientes en la otra forman una proporción y dados dos valores que se corresponden y un tercero, es posible calcular el medio o el extremo que falta de la proporción.

Trabajemos estas ideas con un ejemplo. Primero, resolvé el problema, y luego volvé sobre la lectura, para comprender mejor la teoría.

<ins>Problema:</ins> Teniendo en cuenta que una bolsa de semillas pesa 20 kg, ¿cuánto pesan 20 bolsas? Para transportar, se cuenta con un camión que puede cargar hasta 24 toneladas de semilla. ¿Cuántas bolsas puede transportar el camión en un viaje?

Al trabajar con relaciones, podemos utilizar distintos registros de representación de la misma situación:

-en lenguaje coloquial, que es el enunciado de la situación con palabras;

-en una tabla de valores, como la que figura a continuación;

-en un gráfico cartesiano;

-a través de una fórmula.

La situación sigue siendo la misma, pero depende de cómo se quiera dar a conocer la información, qué es importante destacar, o si nos interesa tener una respuesta general, el tipo de registro que utilicemos.

Veamos la información en una tabla de valores, que es el registro aritmético más habitual

NÚMERO DE BOLSAS	1	2	20	10	1000	200
Peso en kg	20	40	400	200	20000	4000

Las cantidades de *bolsas de semillas* y *peso en kg* se relacionan de forma directamente proporcional.

-La constante de proporcionalidad para obtener el peso en kg de un cierto número de bolsas es 20.

kg de semillas = 20 x cantidad de bolsas

-La constante de proporcionalidad para obtener el número de bolsas de un cierto peso de semilla es 0,05.

Cantidad de bolsas = 0,05 x kg de semillas

El valor de la constante nos permite producir la fórmula o expresión algebraica de la relación.

Usando esta tabla se puede comprobar que si se suman dos valores en una misma fila, es posible determinar el valor que corresponde a la suma, sumando los valores correspondientes en la otra fila. Por ejemplo, para calcular cuántas bolsas corresponden a 24000 kg (24 ton) basta sumar las bolsa que corresponden a 2.0000 kg y 4.000 kg

1000	200	1200
20000	4000	24000

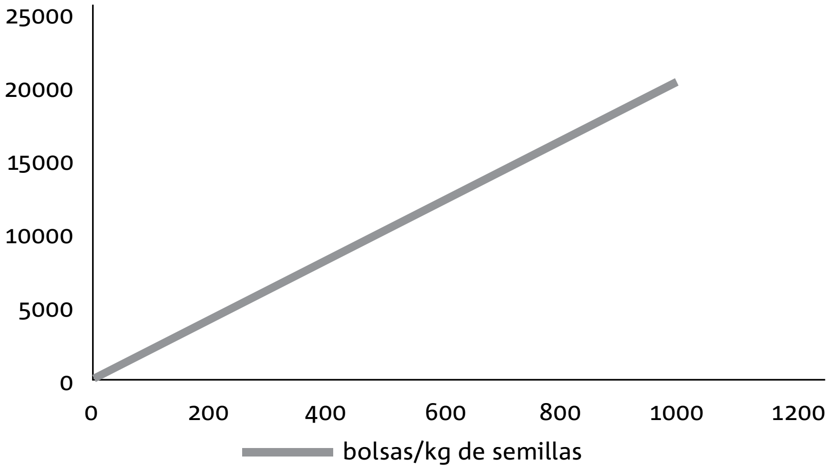
En general si dos cantidades se corresponden de forma directamente proporcional

CANTIDAD 1	CANTIDAD 2
a	e
b	f
c	g
d	h
a + b	e + f
b - d	f - h
c x n	g x n
c / m	g / m

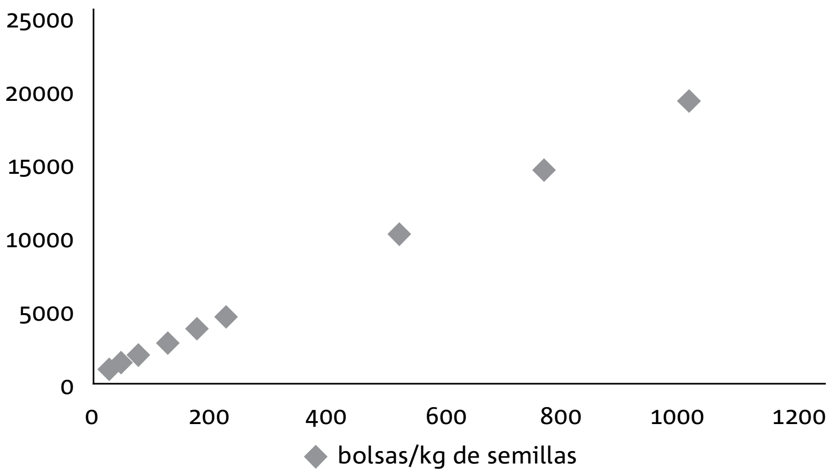
a/e=b/f=c/g=d/h=a+b/e+f=b-d=f-h=c x n/g x n= c/m = g/m = k

Estas expresiones dan cuenta de las propiedades de la proporcionalidad directa.

Si los valores correspondientes a una relación de proporcionalidad directa se representan en un sistema de coordenadas cartesianas, los puntos del gráfico que se obtiene se encuentran en una recta que pasa por el origen de coordenadas



Si nos ponemos rigurosos, en términos matemáticos, por la información que poseemos, lo correcto es presentar el gráfico indicando los valores numéricos con los que contamos, dado que trabajamos con números racionales.



ACTIVIDAD 10

-Una vez realizada la lectura y las actividades de esta Unidad hasta aquí, volvé sobre la actividad 9 y reformulá tus respuestas.

-Sobre lo desarrollado, ¿agregarías algo más?

3. Ampliar y reducir, escalas

Fotos, diagramas de exposiciones, planos de casas, esquemas para realizar un recorrido en un museo, mapas, esquemas para llevar a cabo la evacuación de un edificio...

Cantidad de ejemplos de representaciones que nos muestran el mundo físico donde desarrollamos nuestras actividades, en una superficie plana.

En el caso particular de escalas, algunas de las situaciones que continúan nuestro trabajo con la proporcionalidad directa, están vinculadas con los puntos de referencia que reconocemos en una foto, la semejanza de los objetos dibujados, la relación de proporcionalidad que existe entre las medidas del original y su representación, la posibilidad de utilizar la escala para ubicarnos y determinar distancias a partir de un mapa.

ACTIVIDAD 11

Emiliano es maestro mayor de obras y tiene a su cargo la construcción de una vivienda con un solo dormitorio. Dispone de los planos originales que han sido confeccionados por el arquitecto. Como debía ausentarse, Emiliano decidió fotocopiar la parte del plano que correspondía a la habitación que debían empezar a construir. Cuando entregó la fotocopia a Fermín, uno de los albañiles, Emiliano le aclaró que había sido reducida al 50% y que el plano original, por su parte, había sido construido en una escala de 1:50.

Contento de su nueva responsabilidad, Fermín empezó a dirigir la construcción. Después de un día de trabajo, sus compañeros notaron que había algo raro, las dimensiones del dormitorio no guardaban relación con las dimensiones del resto de la casa.

a) ¿Qué podía haber ocurrido?

b) ¿Qué cálculos debió hacer el albañil para que el dormitorio quedara en proporción con respecto al resto de la casa?

Se trata de que registres el posible cálculo y la explicación que encontraste.

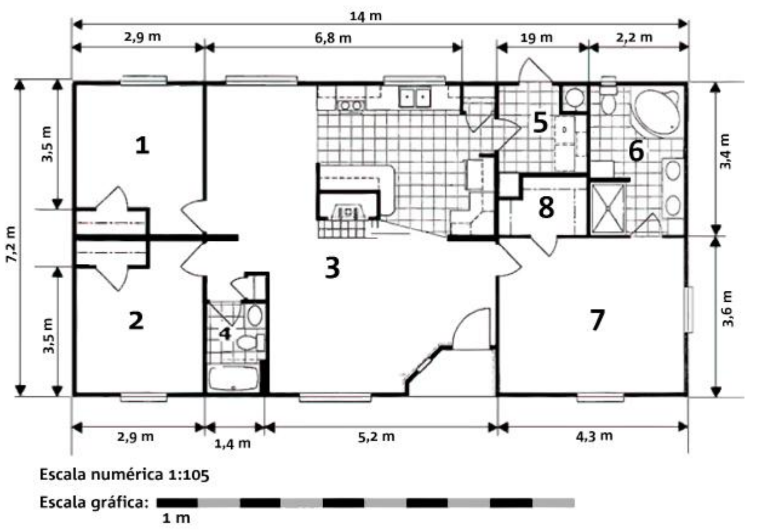
ACTIVIDAD 12

Mientras varios albañiles discutían qué podía haber pasado, Fermín recordó que el plano estaba construido en una escala de 1:50, lo que significaba que 1 cm del plano representaba 50 cm de la realidad, y que la fotocopia, reducida un 50% con respecto al plano, quería decir que las dimensiones lineales del plano original, en la fotocopia medían la mitad. Con estos argumentos, Fermín quiso mostrar que para construir la habitación había que usar una escala de 1:25.

¿Estás de acuerdo con los argumentos de Fermín? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 13

El arquitecto le propuso a Emiliano que lo acompañara en una obra mayor. Al mostrarle el plano, Emiliano se dio cuenta de la importancia del nuevo trabajo.



a) Explicá las referencias de la escala numérica y la escala gráfica. ¿Cuál te resulta mejor? ¿Por qué?

b) Para poder organizar la tarea del plomero, Emiliano debe hacer un nuevo plano sólo del cuarto N° 6, pero ampliando la escala al triple. ¿Cómo resulta el nuevo plano? ¿Qué debes tener en cuenta para realizarlo?

c) ¿Cuáles pueden ser las dimensiones mínimas del terreno necesarias para construir esta nueva casa?

ACTIVIDAD 14

Para publicitar las tareas de construcción deciden tomar fotografías para usarlas en distintos folletos. La imprenta que se va a contratar cuenta con las siguientes medidas en fotos y papel que utiliza para la reproducción de las fotos:

MEDIDAS DE LAS FOTOS	
10 x 15 cm	Opción 1
13 x 18 cm	Opción 2
15 x 21 cm	Opción 3

PAPEL QUE UTILIZAN LAS MÁQUINAS	
156 x 12.7 cm	Tipo a
186 x 15 cm	Tipo b

a) ¿Cuántas fotos de cada opción se pueden imprimir si se utiliza el tipo de papel a? ¿Y si se utiliza el tipo de papel b?

b) ¿Con cuál o cuáles de las opciones de medidas para fotos se desperdicia menos papel, según sea el tipo de papel?

4. A modo de cierre

Iniciamos este recorrido a partir del trabajo con porcentajes, como primer acercamiento a la proporcionalidad. Esto nos llevó a tener que revisar algunas propiedades de las operaciones, para poder controlar los cálculos, y sobre la comparación de números racionales, para establecer las relaciones entre razones numéricas.

Avanzamos en el trabajo, usando distintos registros de las relaciones numéricas entre magnitudes: los enunciados, las tablas de valores, los gráficos, dejando planteada la posibilidad de la expresión algebraica sobre la que avanzaremos en las siguientes unidades.

Otro concepto asociado, el de escala, nos permitió recuperar las distintas estrategias de resolución presentadas, así como la utilización de las propiedades de la proporcionalidad.

A lo largo del recorrido propuesto, las actividades asociadas a estos contenidos, fueron:

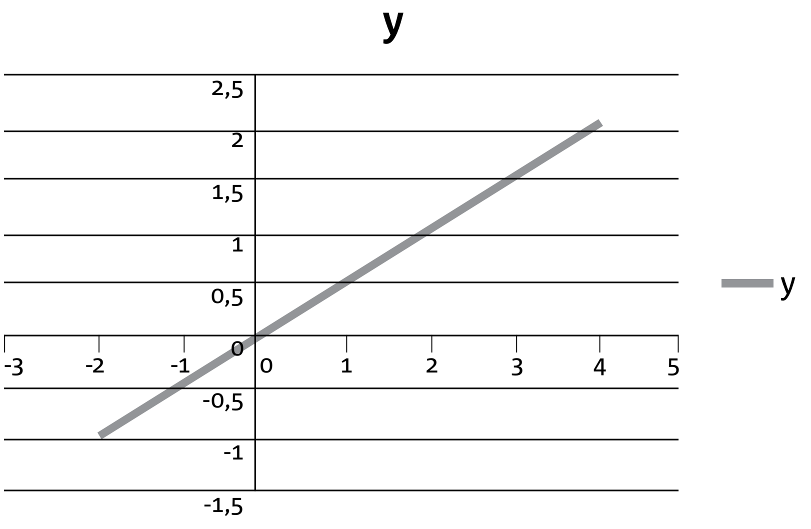
-Cálculo de variaciones porcentuales, tendencias de variación, análisis de propiedades de las proporciones.

Cálculo de razones, proporciones y tasas, análisis de afirmaciones, justificación de procedimientos, elaboración de gráficos.

La proporcionalidad debe ser estudiada como forma de cambio uniforme sobre ejemplos cotidianos y para a partir de ella analizar propiedades de otras funciones numéricas, geométricas o experimentales. El poder de las funciones consiste tanto en describir de manera simple situaciones complejas como en permitir la predicción de resultados, cuestiones con las que avanzaremos en la segunda unidad.

Podemos definir una función como una relación que pone en evidencia fenómenos de cambio donde, por ejemplo, valores de una magnitud tienen un valor correspondiente de otra. La proporcionalidad es una función numérica cuya representación gráfica es una recta que pasa por el origen y cuya pendiente es la constante de proporcionalidad. Esta puede ser representada por la ecuación $y = m.x$

Por ejemplo, $y = \frac{1}{2} x$



| ACTIVIDAD 15

En el transcurso de las clases, habrás podido identificar algunas dificultades y fortalezas en relación con el uso de las matemáticas que conocés. En tal sentido, reflexionando acerca de tu desempeño en relación con las siguientes cuestiones.

a) ¿Interpretaste la información contenida en los textos?

b) Al interpretar o expresar relaciones en lenguaje matemático ¿pudiste hacerlo en forma correcta desde el primer intento?

c) ¿Pudiste operar numéricamente y obtener resultados razonables en función a los datos?

d) ¿Qué considerás necesario seguir trabajando?

Caso 1

1. Cuantificación de variables sociales. Tasas de alfabetización en las distintas regiones del país

1.1. Presentación del caso

Como ya venimos trabajando, comprender la información que se presenta en un cuadro o tabla incluye interpretar cada conjunto de datos y las relaciones entre ellos. En este sentido, generalmente se recurre a medidas que permiten comparar las diferencias o semejanzas entre los conjuntos de datos que se están estudiando. Estas relaciones se expresan como un cociente entre la cantidad de observaciones de un grupo determinado respecto a otro de la misma población.

Por ejemplo, sabiendo que según el censo 2010 la cantidad de varones mayores de 10 años alfabetizados era de 15.788.575 y la de mujeres de 16.967.822, es posible establecer distintas relaciones. Para comparar la relación que existe entre la cantidad de varones alfabetizados, respecto de las mujeres, se puede escribir una razón:[1]

$$\frac{\text{Cantidad de varones alfabetizados } 15.788.575 = 0{,}93 \text{ (aproximadamente 1)}}{\text{Cantidad de mujeres alfabetizadas } 16.967.822}$$

Este resultado se puede expresar afirmando que por cada varón alfabetizado, hay una mujer en las mismas condiciones.

ACTIVIDAD

Para entrar en tema:

a) Recuperá la noción de "razón" y realizá tu propia definición, utilizando la de "cociente".

1. Ver Unidad 1

b) La razón del ejemplo anterior se ha establecido entre dos números enteros. ¿Entre qué otro tipo de números es posible hacerlo?

c) Da cinco ejemplos de razones que se usen en matemática (como Pi = razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro).

d) Buscá cinco ejemplos de usos de la noción de razón en otros campos de conocimiento (por ejemplo, física, química, geografía, economía, sicología).

También se puede afirmar, a partir de la comparación de los valores absolutos del ejemplo anterior, que hay más mujeres alfabetizadas que varones en las mismas condiciones. Sin embargo, esta afirmación que es correcta en términos absolutos no es significativa cuando se quiere mirar cómo influyen las cuestiones de género en la alfabetización. Para hacerlo conviene comparar cada uno de esos datos con la población total de la que provienen (hay 16.108.042 varones y 17.290.183 mujeres de 10 años o más). En este caso, los datos resultan expresados en términos de proporciones y es posible establecer una comparación directa. De este modo se observa que la proporción de alfabetos en ambas poblaciones es la misma.

$$\frac{\text{Cantidad de varones alfabetos}}{\text{Total de varones de 10 años o más}} = \frac{15.788.575}{16.108.042} = 0{,}98$$

$$\frac{\text{Cantidad de mujeres alfabetas}}{\text{Total de mujeres de 10 años o más}} = \frac{16.967.822}{17.290.183} = 0{,}98$$

1.2. Consignas de trabajo

ACTIVIDAD 1

De realización individual.

La tasa[2] de "alfabetización" permite conocer la proporción de personas alfabetizadas de una determinada edad respecto al total de las personas de la misma edad.

Considerando los datos del cuadro "Población de 10 años o más por condición de alfabetismo y sexo" del Censo 2010, resolvé los siguientes puntos.

2. Las tasas son un tipo particular de razones que se emplean cuando el uso de proporciones conducirían a números decimales muy pequeños. Suelen expresarse en relación a 100 ó 1000 habitantes.

Cuadro P7. Total del país. Población de 10 años y más por condición de alfabetismo y sexo, según provincia. Año 2010 (*)

Provincia	Población de 10 años y más	Condición de alfabetismo					
		Alfabetos			Analfabetos		
		Total	Varones	Mujeres	Total	Varones	Mujeres
Total del país	**33,398,225**	**32,756,397**	**15,788,575**	**16,967,822**	**641,828**	**319,467**	**322,361**
Ciudad Autónoma de Buenos Aires	2,568,141	2,555,738	1,160,483	1,395,255	12,403	5,344	7,059
Buenos Aires	13,044,694	12,865,686	6,203,482	6,662,204	179,008	88,705	90,303
24 partidos del Gran Buenos Aires	8,259,132	8,141,907	3,917,957	4,223,950	117,225	55,416	61,809
Interior de la provincia de Bs. As.	4,785,562	4,723,779	2,285,525	2,438,254	61,783	33,289	28,494
Catamarca	299,189	293,153	144,528	148,625	6,036	3,108	2,928
Chaco	852,752	806,020	394,795	411,225	46,732	22,440	24,292
Chubut	420,137	411,823	205,779	206,044	8,314	4,049	4,265
Córdoba	2,780,731	2,739,946	1,314,229	1,425,717	40,785	22,334	18,451
Corrientes	806,440	771,948	372,493	399,455	34,492	17,969	16,523
Entre Ríos	1,027,265	1,005,361	486,281	519,080	21,904	12,294	9,610
Formosa	425,344	407,948	200,956	206,992	17,396	7,821	9,575
Jujuy	548,572	531,384	261,419	269,965	17,188	5,404	11,784
La Pampa	266,919	261,887	128,679	133,208	5,032	2,805	2,227
La Rioja	273,446	268,449	131,833	136,616	4,997	2,843	2,154
Mendoza	1,443,490	1,411,960	681,053	730,907	31,530	15,527	16,003
Misiones	871,555	835,783	412,901	422,882	35,772	17,110	18,662
Neuquén	455,068	444,609	219,539	225,070	10,459	5,120	5,339
Río Negro	531,387	518,307	255,390	262,917	13,080	6,541	6,539
Salta	968,376	938,009	459,258	478,751	30,367	12,710	17,657
San Juan	549,718	538,225	260,076	278,149	11,493	6,360	5,133
San Luis	353,900	347,388	170,030	177,358	6,512	3,674	2,838
Santa Cruz	221,824	219,320	113,297	106,023	2,504	1,291	1,213
Santa Fe	2,704,981	2,656,886	1,273,525	1,383,361	48,095	25,003	23,092
Santiago del Estero	696,816	668,946	328,348	340,598	27,870	14,809	13,061
Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur	104,126	103,421	52,991	50,430	705	347	358
Tucumán	1,183,354	1,154,200	557,210	596,990	29,154	15,859	13,295

a) Realizá una tabla que muestre la proporción de alfabetos y analfabetos, según sexo del total de la población de 10 o más años en el área metropolitana (Ciudad de Buenos Aires y Gran Buenos Aires). Expresar los resultados obtenidos en porcentajes.

b) Si se observa el cuadro, podría pensarse que la razón de mujeres analfabetas, respecto a los varones analfabetos, en cada provincia es prácticamente de 1:1. Mostrá, si es posible, dos casos en que esto no sea así.

c) Acepten o rechacen la siguiente afirmación justificando adecuadamente: "Se puede decir que hay muchas más personas alfabetizadas en La Pampa que en Mendoza".

*__Nota correspondiente al cuadro de la página anterior:__ la población total incluye a las personas viviendo en situación de calle.

Las Islas Malvinas, Georgias del Sur, Sándwich del Sur y los espacios marítimos circundantes forman parte integrante del territorio nacional argentino. Debido a que dichos territorios se encuentran sometidos a la ocupación ilegal del Reino Unido de Gran Bretaña e Irlanda del Norte, la República Argentina se vio impedida de llevar a cabo el Censo 2010 en esa área.

Estas islas pertenecen al departamento «Islas del Atlántico Sur». De este departamento fue censada sólo la base que se encuentra en la Isla Laurie, que pertenece a las Islas Orcadas del Sur. La Base Antártica Orcadas situada en dicha isla es la más antigua de las bases antárticas en funcionamiento que pertenecen a la República Argentina.

INDEC. Censo Nacional de Población, Hogares y Viviendas 2010.

ACTIVIDAD 2

Para resolver en grupos.

En el cuadro siguiente se muestran las provincias de nuestro país que conforman distintas regiones.

a) Organizados en grupos, elijan dos regiones por grupo (excluyendo la Región Metropolitana) y realicen una tabla donde conste un análisis de la condición de alfabetización (o analfabetismo), calculando razones, porcentajes y tasas.

b) Comparen los datos de esas dos regiones. ¿A qué conclusiones pueden arribar?

c) De acuerdo a los datos analizados, realicen un cartograma indicando en el mapa de nuestro país, la condición de alfabetización de cada provincia. Para hacerlo, deben seleccionar un criterio para armar grupos de igual condición y según ellos colorear las provincias.

REGIÓN	PROVINCIAS
Metropolitana	Ciudad de Buenos Aires 24 Partidos del Gran Buenos Aires
Cuyo	Mendoza San Juan San Luis
Noroeste	Catamarca Jujuy La Rioja Salta Santiago del Estero Tucumán
Pampeana	Córdoba Entre Ríos La Pampa Resto de la Provincia de Buenos Aires
Nordeste	Chaco Corrientes Formosa Misiones
Patagonia	Chubut Neuquén Río Negro Santa Cruz Tierra del Fuego, Antártida e Islas del Atlántico Sur

Mapa de la República Argentina con división política

Unidad 2

Una de las ideas fundamentales que trabajamos en la Unidad 1 es que los conocimientos matemáticos surgen de la interacción de las personas con la realidad, para dar respuesta a distintos problemas y necesidades. Por eso, sostenemos que la matemática está en permanente construcción, que progresa a partir de nuevas formas de resolución de viejos problemas y el planteo de nuevos problemas.

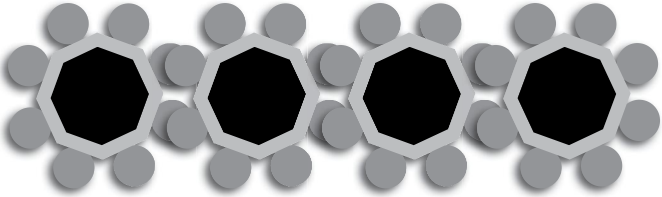
Es necesario destacar que este desarrollo no fue lineal, hubo idas y vueltas, marchas y contramarchas hasta formalizar algunos de los conocimientos tal como hoy los conocemos; ejemplo de esto es la historia del concepto de función que abordaremos en la segunda parte de esta Unidad.

Si bien en todas las épocas los problemas han tenido un rol fundamental, estos no siempre surgen de la vida cotidiana, sino que tienen distintas fuentes de origen.

- Ya mencionamos los problemas surgidos de la experiencia, de la práctica, como la construcción de los calendarios que estuvo en manos de sacerdotes y agricultores, o el uso y operatoria de las fracciones en el antiguo Egipcio.
- Otros han surgido a partir de preguntas y requerimientos de distintas disciplinas, como el cálculo diferencial e integral para resolver problemas de física; o el cálculo combinatorio empleado en teorías biológicas contemporáneas.
- También, algunos conocimientos han surgido de problemas puramente matemáticos, originados en el placer de resolver desafíos que han formado parte de la matemática de todas las culturas en todas las épocas.

Paralelamente se fue constituyendo un modo particular de producir y de pensar estos conocimientos y un lenguaje propio para expresarlos. La manera de comunicar y dar cuenta de la validez de los procedimientos es parte del quehacer matemático que abordamos en este curso.

Comencemos ayudando a Victoria en el armado de unas guardas con lentejuelas para los uniformes de la Murga del barrio, *Desesperados por el álgebra*. Se propuso realizar un diseño, respetando los colores de la murga, como el que muestra la figura, de manera que cada lentejuela negro quedara rodeada por 8 grises.



a) ¿Cuántas lentejuelas grises se necesitan si se colocan 3 negras?

b) ¿Cuántas lentejuelas grises se necesitan si se colocan 10 negras?

c) ¿Qué cuenta es necesario hacer para calcular cuántas lentejuelas grises se necesitan si se colocan 25 negras?

d) ¿Qué cuenta es necesario hacer para calcular cuántas lentejuelas grises se necesitan si se colocan **n** negras?[5]

e) Respetando el esquema, ¿si se usaron 458 lentejuelas grises, cuántas lentejuelas negras se pusieron? ¿Y si se usaron 355 lentejuelas negras?

1. Expresiones algebraicas

Las lentejuelas de los uniformes nos sirven de excusa para avanzar en el trabajo matemático. Seguramente, al responder las primeras preguntas te ha servido dibujar y contar la cantidad de lentejuelas grises necesarias. Pero, al aumentar el número de lentejuelas negras propuesto, la estrategia de contar una a una no resulta apropiada, debés buscar diferentes maneras para contar que no requieran la realización del dibujo completo.

5. En este caso usamos la letra n para indicar que se trata de cualquier número natural, designado para las lentejuelas negras.

Claro que hay distintas maneras de contar que, al resolver la pregunta d), generan diferentes modos de generalización y, por lo tanto, diferentes expresiones que usan la letra **n**. Para aclarar estas ideas, te damos algunos ejemplos,

-Javier llegó a la fórmula $8 + 6(n - 1)$ ya que contó 8 para la primera lentejuela negra y luego, cada una de las n – 1 lentejuelas negras restantes aportan 6 lentejuelas grises más.
-Lucas, en cambio, llegó a la expresión $6n + 2$, porque considera que todas las lentejuelas negras aportan 6 lentejuelas grises y la última tiene 2 más.

ACTIVIDAD 2

a) ¿A qué expresión general llegaste?
b) Compartí tu trabajo con tus compañeros, comparando expresiones.
c) Las distintas expresiones presentadas, ¿son todas válidas? ¿Cómo lo averiguamos?
d) Si considero distintas expresiones válidas, ¿para cualquier valor de **n** el resultado de lentejuelas grises es el mismo?

En esta actividad, disponer de una fórmula para modelizar[6] el problema planteado, permite predecir la cantidad de lentejuelas grises necesarias para cualquier número de lentejuelas negras sin necesidad de contar ni de dibujar. De la misma manera, es posible responder a la pregunta de la Actividad 1.e) mediante la resolución de una ecuación.

Sin embargo, en este ítem, para una de las preguntas, la ecuación tiene solución entera, es decir, puede dar cuenta de una cantidad determinada de lentejuelas; pero en la otra no, por lo tanto, frente al resultado debés volver al contexto del problema y considerar que una tiene solución y la otra no. Es importante que te detengas a reflexionar para recuperar la idea de que una vez resuelta la ecuación, aunque encuentres una solución numérica, esto no significa que el problema tenga solución; debés ver si la solución encontrada tiene sentido en el contexto de la situación de origen.

6. En este caso, se trata de encontrar un modelo matemático, una expresión en este particular lenguaje que sirva para explicar y estudiar la situación que le dio origen.

Una vez resueltas estas actividades, te proponemos recordar algunos procedimientos de resolución de expresiones algebraicas, ya que su manipulación nos va a permitir avanzar con el trabajo con funciones. Se trata de ganar ciertas habilidades al operar con dichas expresiones.

Pero, antes de continuar, es apropiado ponernos de acuerdo al marcar la diferencia entre expresión algebraica y ecuación. En general, debemos considerar que la ecuación es una igualdad que lleva implícita una pregunta ¿para qué es verdadera? En tanto que, distintas maneras de contar generaron distintas maneras de escribir una fórmula general, es decir, distintas expresiones algebraicas. Claro que al aplicar cualquiera de ellas, acordada como válida, se obtienen los mismos resultados.

Entonces, vamos a decir que ***dos expresiones algebraicas son equivalentes si cada vez que se reemplazan las letras por un número cualquiera en las dos, el resultado es el mismo.*** Asimismo, si dos expresiones algebraicas son equivalentes, ambas tendrán que poder escribirse "de la misma forma", o sea, se debe poder transformar una de ellas en la otra usando las propiedades de las operaciones.[7]

Por ejemplo, $8 + 6\,(n - 1) = 8 + 6\,\mathrm{n} - 6 = 6\,\mathrm{n} + 8 - 6 = 6\,n + 2$

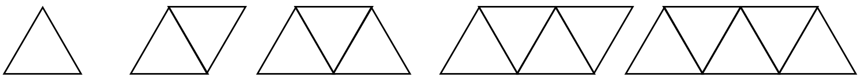
Avancemos un poco más con este tipo de trabajo, a partir del planteo de una situación en un contexto intramatemático que nos va a permitir ganar en destreza con estas expresiones.

Quizás, una marca característica de los seguidores de Pitágoras se pone en evidencia al considerar su concepción sobre los números, asignándoles interpretaciones geométricas. De allí que encontraban condiciones particulares para diferentes tipos de números: triangulares, cuadrangulares, perfectos, etc.

7. Las propiedades a las que se hace referencia son: conmutativa, asociativa y distributiva. Es conveniente que si no las recordás, dediques un momento a buscarlas en algún texto o en Internet.

ACTIVIDAD 3

Utilizando diferentes palillos se puede construir una serie de figuras con triángulos tal como se muestra en el dibujo, que continúa siguiendo el mismo patrón



a) Completá la tabla de valores que muestra la relación entre la cantidad de triángulos que forma la figura y la cantidad P de palillos que se necesitan

T									
P									

b) ¿Cuántos palillos hacen falta para armar una figura de 100 triángulos?

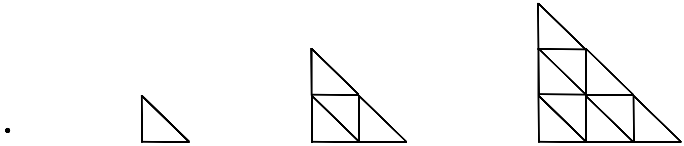
c) ¿Es cierto que para formar el doble de triángulos se necesita el doble de palillos?

d) Escribí una fórmula que te permita calcular cuántos palillos necesitás para armar una figura con **n** triángulos.

ACTIVIDAD 4

La propuesta es que resuelvas algunos de los problemas matemáticos que preocupaban a los pitagóricos. Vas a encontrar preguntas similares a las planteadas en las actividades anteriores, recuperá tus estrategias al responder.

a) Los números triangulares son los siguientes:



1 3 6 10

O sea, son los que se obtienen contando los vértices de los triángulos equiláteros cuyos lados miden 1, 2, 3... unidades (considerando que la unidad es el triángulo inicial).

-¿Cuál será el número triangular que está en el quinto lugar? ¿Y en el 10?

-¿Cuál será el número triangular que está en el lugar 100? ¿Y en el lugar n?

b) De la misma forma, podemos armar números cuadrangulares.

-¿Cómo los representarías, teniendo en cuenta que los tres primeros son: 1; 4; 9?

-El número 169, ¿es cuadrangular? De ser así, ¿cuál es su siguiente?

-¿Cuáles serán los números cuadrangulares que están en los lugares 10; 100 y n?

c) ¿Existirán números triangulares que a su vez sean cuadrangulares? ¿Cómo lo podrías averiguar?

En estas actividades, que pueden originar diferentes expresiones algebraicas adecuadas para generalizar, nuevamente nos encontramos frente a la necesidad de validar la equivalencia entre las expresiones que surjan.

Esto puede realizarse, en general, a través de dos caminos:

-relacionando cada una con el contexto, es decir, argumentando con respecto a la manera en que fue construida la expresión, o

-validar una de ellas utilizando el contexto y manipulándola usando las propiedades para escribir las otras, y así, poder establecer si son o no equivalentes.

Insistimos, para poder completar este tipo de trabajo y garantizar cierta experiencia con las expresiones algebraicas equivalentes, se proponen las actividades que figuran a continuación. Tené presente que este tipo de tarea habilita ciertas herramientas para continuar con el trabajo de modelización matemática.

ACTIVIDAD 5

Completá usando la operación, el número o la expresión necesarios para obtener expresiones algebraicas equivalentes. En cada caso, explicá las razones de la elección.

> Como ejemplo, va resuelto el punto a)
>
> $5\ (\ 4 + x\ ) = 20 + \ldots$
>
> *$5\ (4 + x) = 20 + 5\ x$, ya que se aplicó la propiedad distributiva*

$12 + (4 + 2\ x) = 12 + \ldots\ \ldots 2\ x$

$5 + \ldots\ \ldots\ 3\ x = 5 + (\ 2 - 3x\ )$

$3\ (\ 2 - x\ ) = 6 \ldots 3\ x$

$(x + 7)(1 + x) = x + \ldots\ldots + 7 + \ldots\ldots$

$\ldots\ldots\ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots = 7x - 3 + 8 - 2x$

$x - (2 - x) = x \ldots 2 \ldots\ldots x$

$2x - (1 + x) = \ldots\ldots\ldots - 1$

ACTIVIDAD 6

En esta actividad debés vincular, si lo considerás posible, cada expresión de la columna de la izquierda con otra equivalente de la columna de la derecha, copiando la expresión.

a) 5 + (2 – x)		K) x 2 + 25
b) 9 – 4 (x + 2)		L) 6 + 10 x
c) 8x – 2x		M) 3 x - 4
d) 5 x – (4 + 2 x)		N) 7 – x
e) 5 (x – 1) + 8 x		O) 1 – 4 x
f) (x + 5)2		P) 9 x + 20
g) (3 + 5 x) 2		Q) 13 x - 5
h) (x + 4) (5 + x) – x2		R) 6 x
		S) x2 + 10 x + 25
		T) (x + 5) (x – 5)
		U) x + 0,6

ACTIVIDAD 7

Escribí tres expresiones algebraicas equivalentes a cada una de las siguientes:

a) 6 n + 7			
b) 2 n + n – 5			
c) n (n + 1)			
d) 2 n – (n + 2)			
e) n – 3			
f) n + 2 (n – 1)			

ACTIVIDAD 8

Reunite con un compañero y respondan cada una de las cuestiones, escribiendo la manera en que acuerdan justificar cada una de las respuestas.

a) ¿Es cierto que para cualquier valor entero de **n** la expresión $3\,(n + 5) + 5\,(n - 3)$ es múltiplo[8] de 8?

b) ¿Es cierto que para cualquier valor entero de **n** la expresión $n\,(3n + 5) - 3\,n^2 + 2$ es múltiplo de 5?

c) ¿Es cierto que para cualquier valor entero de **n** la expresión $2\,n\,(n - 2) - 2\,n^2$ da lo mismo que si lo reemplazamos en esta otra expresión: $4\,(n - 2) + 4$?

ACTIVIDAD 9

Hay expresiones algebraicas que no son equivalentes pero que coinciden para algunos valores de x. Por ejemplo, $2\,x$ y $3\,x$ no son equivalentes porque si consideramos $x = 1$, la primera expresión toma el valor 2 y la segunda el valor 3.

Sin embargo, no podemos negar que para $x = 0$ las dos expresiones valen lo mismo.

a) Para saber para qué valores de x las expresiones $2\,x - 5$ y $3\,x + 2$ coinciden, Patricia pensó de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3\,x + 2 &= 2x + x + 7 - 5 \\ &= 2\,x - 5 + x + 7 \end{aligned}$$

y dijo que las dos expresiones van a coincidir solamente cuando $x + 7 = 0$, es decir para $x = -7$ ¿Es correcto el razonamiento de Patricia? ¿Por qué?

b) Usá el razonamiento anterior para encontrar para qué valor de x coinciden las siguientes expresiones:

$4\,x + 3$ y $3\,x - 3$

$4\,x + 3$ y $x + 3$

8. Recordá que un número a es múltiplo de otro b cuando existe algún número entero K tal que a =b K; en el caso de que a deba ser múltiplo de 8, debe cumplir que a = 8 K.

1.1. Sobre razonamientos

A esta altura de la Unidad 2, puede resultar importante poner en evidencia el tipo de razonamiento matemático que ponemos en juego, por ejemplo, al argumentar cuándo una expresión algebraica es válida o al pasar de una expresión a otra.

En el diccionario es posible que encontremos que las palabras *inferir* y *deducir* son consideradas sinónimos. Sin embargo, en la vida cotidiana o en campos de conocimientos tales como las ciencias naturales, las ciencias sociales, o la matemática, entre otros, esos términos adquieren significados muy diferentes.

La palabra *inferencia* se utiliza para hacer referencia tanto a razonamientos inductivos como a razonamientos deductivos. Pasamos a caracterizar tales formas de razonar.

A diario extraemos conclusiones generales mediante la observación de un número limitado de casos, en los cuales se reitera una característica común a todos: hemos realizado una *inferencia inductiva*. Sin embargo, la conclusión es válida sólo si hemos verificado uno a uno todos los casos posibles, es decir si realizamos una *inferencia inductiva completa*.

Si no hubiésemos tenido a nuestro alcance todos los casos posibles, esa *inferencia inductiva incompleta* nos permite obtener una conclusión incierta referida a una característica de los casos observados, siempre que no hayan surgido ejemplos contraproducentes. Dicha conclusión es tanto más probable cuanto mayor sea el número de las reiteradas observaciones efectuadas.

Los razonamientos mediante inferencias inductivas incompletas son usuales no sólo en la vida diaria, sino también en campos de conocimiento tales como las ciencias naturales, las ciencias sociales, las humanidades.

Pero las conclusiones surgidas por medio de inferencias inductivas (completas o incompletas) no son proposiciones *demostradas* en el sentido matemático del término. Podemos decir que han sido verificadas (en forma total o parcial, respectivamente).

En matemática la mayoría de las veces trabajamos con infinitos elementos, lo que hace imposible asegurar la validez de una afirmación mediante una verificación inductiva total. Además, en esta disciplina basta que un solo caso contradiga una conjetura para que sea considerada inválida, por lo que la inferencia inductiva no es una forma de prueba aceptada en los ámbitos de producción matemática.

Sin embargo, debemos tener en cuenta que el matemático conjetura propiedades antes de demostrarlas y que en el proceso de conjeturar se infiere inductivamente. Pero, para aceptar la validez de una conjetura, en esta disciplina es necesario, como dijimos en la Introducción, que sea probada mediante inferencias deductivas.

ACTIVIDAD 10

a) ¿A qué nos referimos cuando hablamos de conjeturas? ¿Podés dar algún ejemplo?

b) En las actividades anteriores, seleccioná ejemplos con los que puedas explicar alguno de los diferentes razonamientos.

c) Compartí tu trabajo con otros compañeros. ¿A qué conclusiones llegaron?

Para finalizar esta parte, te proponemos una última actividad, en la que también se trata de generalizar a partir de un modelo.

ACTIVIDAD 11

Al comienzo de la reunión mensual de la "Cofradía para la conservación de las Buenas Costumbres", los participantes se colocan en ronda y cumplen con el siguiente ritual:

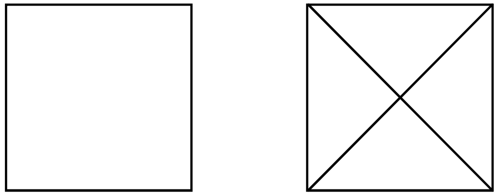
-saludan con un beso a las personas que tienen a cada lado

-dan un apretón de manos para saludar al resto de los participantes.

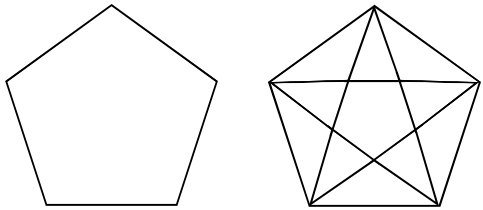
a) Si en el primer encuentro sólo fueron 4 miembros, ¿cuántos besos y cuántos apretones se dieron?

b) El mes pasado participaron 6 y este mes fueron 9. Para el próximo, se espera que vayan 20. Calculen la cantidad de besos y apretones en cada caso.

c) Buscá una manera de calcular la cantidad de besos y apretones para **n** participantes. Quizás pueda servir realizar un esquema



4 besos **2 apretones**



5 besos **5 apretones**

Puede ser útil tener en cuenta que las actividades de generalización se pueden organizar según se encuentren relacionadas con:

-la percepción de lo general (ver),

-descripción verbal (decir),

-expresión escrita, que incluyen los de expresión simbólica ($f_{(x)} = y$),

-aquellas que, después de escribir distintas expresiones para la generalización, se pudieran comprobar aplicando propiedades, que son equivalentes.

2. Funciones

En toda actividad matemática, tanto en la comunidad científica como en un grupo de estudio, están presentes formas propias de definir, explicar, probar, ejemplificar, generalizar, representar de otra manera, o alguna referencia a ellas, que pueden aparecer tanto en forma oral como escrita.

La posibilidad de comprender un texto implica poder interpretar lo leído en ausencia de quien lo escribió, lo que establece una diferencia esencial con la comunicación oral que permite el intercambio de los significados atribuidos a las expresiones utilizadas. Para que el significado atribuido por el lector sea admisible en términos de la cultura matemática, habrá que tener en cuenta que debe enfrentarse con diferentes tipos de expresiones y registros.

Por ello, a lo largo de las actividades te has encontrado que dimos especial importancia a las particularidades que adopta la lectura y la elaboración de textos en esta disciplina. Entre ellas, la interpretación de la información contenida en un gráfico y la escritura en lenguaje algebraico de fenómenos de cambio, es decir, aquellos en los cuales dos magnitudes se relacionen de manera de poder encontrar una expresión en lenguaje matemático que nos permita modelizarla.

En este apartado vamos a dedicarnos a estudiar las traducciones en estos registros, a partir de considerar el concepto de función.

ACTIVIDAD 12

Prestá atención a la siguiente situación.

a) Se trata de que escribas 3 o 4 preguntas que puedan responderse a través de la lectura del gráfico o que exijan realizar algunas inferencias.

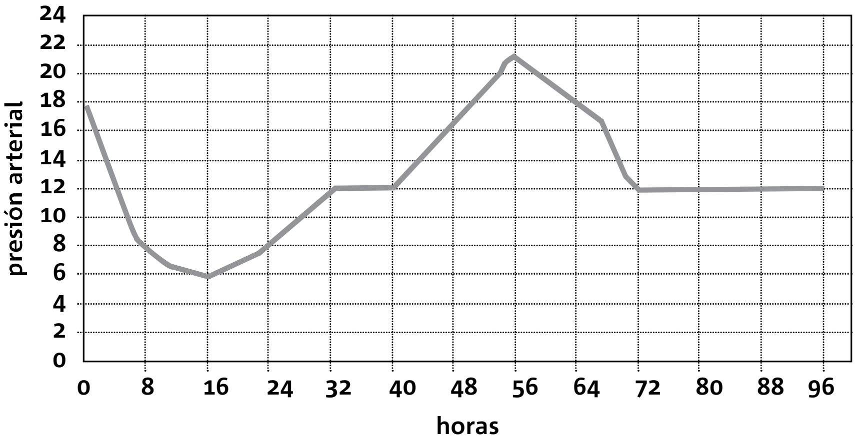
Por ejemplo, *¿Durante cuánto tiempo se tomaron los datos de la presión arterial del paciente?*

b) Intercambiá tus preguntas con las de otro compañero y respondé a las formuladas por él.

c) Entre todos, establezcan qué preguntas resultan más complejas y por qué.

Al ser internado un paciente en el hospital, una de las tareas a cargo de las enfermeras para dar cuenta de su estado es el control de la presión arterial de manera continua.
Dado que se trataba de un caso particular, el médico a cargo solicitó realizar un gráfico que muestre la evolución de la presión arterial máxima a partir del momento en que fue internado.[9]

9. Es bueno señalar que también se controlan los valores mínimos de presión. Pero este gráfico sólo toma en cuenta los máximos.



3. Sobre diferentes registros

Resolver problemas es una condición necesaria pero no suficiente para estudiar matemática. No aprende lo mismo quien resuelve un problema esperando que el profesor indique si está bien o está mal, que quien resuelve y logra explicar cómo lo resolvió y por qué.

Al estudiar matemática, la resolución de un problema tiene que ser acompañada de una explicación que avale lo hecho, que permita explicitar las ideas sobre las que el procedimiento y las respuestas tienen validez. También es necesario poder escuchar las objeciones de los demás, porque ponen a prueba nuestra producción. Estos momentos de trabajo, vinculados con interpretar y comunicar, se oponen a una práctica de la matemática mecánica y poco fundamentada.

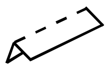
Debatir promueve la explicitación de los procedimientos utilizados, el análisis y la comparación entre las diferentes producciones. A su vez, facilita que mejoremos nuestras explicaciones a partir de los cuestionamientos de otros compañeros para poder defender el propio punto de vista. El pasaje de lo implícito a lo explícito permite nombrar el conocimiento, hacerlo público y, por ende, facilitar reconfirmarlo o modificarlo.

Para ello, vamos a abordar una situación donde intervienen diferentes registros, buscando y comunicando razones que validen nuestras estrategias de resolución.

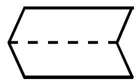
ACTIVIDAD 13

Con motivo del Día del niño, se está organizando un encuentro de plástica para los chicos del barrio. Se cuenta con variedad de lápices, crayones, marcadores y hojas de distinto tipo.

Para acomodar los materiales, se quieren construircajas a partir de una hoja rectangular de cartulina. Las instrucciones a seguir son las siguientes.



pliegue en relieve



pliegue en vacío

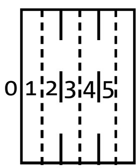


fig. 1

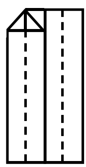


fig. 2

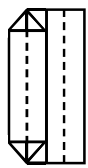


fig. 3

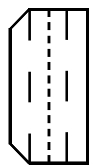


fig. 4

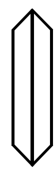


fig. 5

-Realizar 5 pliegues equidistantes a lo largo de la hoja y numerar los bordes de 0 a 6, como se indica en la fig. 1

-Plegar siguiendo la línea 2, apoyándola sobre la 4. Luego, hacer el plegado (casita) tomando como base la línea 1, fig. 2

-Hacer el plegado (casita) tanto arriba como abajo, fig. 3

-Al dar vuelta la construcción, debe quedar como se ve en la fig. 4

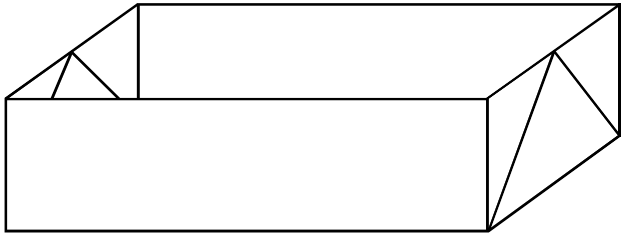
-Repitan los pasos anteriores con el otro lado de la hoja, llevando el pliegue 5 sobre el 3, fig. 5

-Abran la caja y marquen las aristas del fondo y las laterales.

a) Con estas instrucciones, ¿se puede construir una caja de fondo cuadrado? ¿Por qué? Escribí tus anticipaciones, para poder confrontarlas con tus compañeros y luego reformularlas.

b) Realizá la construcción; es importante que no saltees este paso, te ayudará a encontrar argumentos para responder.

Modelo terminado



c) Después de la construcción realizada, ¿podrías construir una caja cuyo fondo sea un cuadrado de 6 cm de lado? ¿Y un rectángulo cuya base mida 13 cm y cuya altura mida 6 cm?

d) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de una hoja para construir una caja de fondo 8 cm x 14 cm y cuya altura mida 5 cm? Realizá los cálculos y registrá las dimensiones obtenidas.

Hasta aquí el trabajo propuesto, tiene dimensiones particulares, tomando en cuenta algunos posibles valores para la base de la caja como para la hoja tomada para su construcción.

Como ya planteamos en otras oportunidades, podemos avanzar buscando alguna formulación más general que, en este caso, nos permita anticipar las posibles cajas, tomando en consideración ya sea las dimensiones del fondo de la caja o las de la hoja de partida.

ACTIVIDAD 14

Sólo para ponernos de acuerdo, tené presente que

-a y b son las dimensiones del fondo de la caja ya construida, y

-x e y son las dimensiones de la hoja

a) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la hoja de partida para construir una caja cuyo fondo sea $a\,.b$?

b) Suponiendo que se conocen las dimensiones de la hoja, ¿cuáles serán las dimensiones de la caja?

c) Investigá qué condiciones deben cumplir las dimensiones x e y de la hoja de partida para poder construir una caja como la indicada en las instrucciones. Registrá tus procedimientos.

Al medir la capacidad de un recipiente, se pueden usar las unidades de medida vinculadas con sus dimensiones lineales de alto (cm), ancho (cm) y largo (cm), poniendo en juego, por ejemplo, cm3 que también suele escribirse como cc. A esta unidad la podés encontrar en los envases de distintas bebidas.

Pero, cuando hablamos de líquidos, lo habitual es utilizar como unidad el litro. Es bueno tener presente que 1 litro = 1000 cm^3

a) ¿Cuál es la capacidad de las cajas que se mencionan en la actividad 12.c)?

b) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la hoja para obtener una caja que contenga ½ litro? ¿Y para que contenga ¼ litro? Puede resultar de utilidad que armes un cuadro con valores, tomando en cuenta las dimensiones de la caja y su capacidad.

4. Funciones que pueden expresarse mediante una fórmula

Para modelizar procesos que crecen o decrecen uniformemente, así estos provengan de la matemática o de otra ciencia, es útil la idea de *función*.

Seguramente ya te has encontrado con funciones que pueden describirse mediante una fórmula y otras que no. La diferenciación entre estos tipos de funciones se puede establecer a partir de los datos que se dan y de un cierto conocimiento del fenómeno que se intenta modelizar. Por ejemplo:

-el área de un rectángulo de altura 2m, medida en metros cuadrados, en función de la longitud de su base, medida en metros, similar al trabajo que realizamos con la caja, se puede expresar con una fórmula; en tanto,

-la cantidad de nietos de una familia en función a la edad de los abuelos, no posee una fórmula que permita modelizar esos valores.

Recordá que, *cuando las cantidades variables de dos magnitudes varían de modo tal que es posible determinar una de ellas a partir del valor de la otra, se dice que la primera es función de la segunda.* En el caso de los ejemplos recién mencionados:

-la función que relaciona el área de un rectángulo de altura 2 m con la medida de su base, es posible encontrar una fórmula que exprese esa variación.

Área del rectángulo = b. 2 m

Área del rectángulo = y = f (b), siendo b base del rectángulo.

-En el caso de los nietos resulta imposible determinar una fórmula que dé cuenta de la cantidad de nietos en función a la edad.

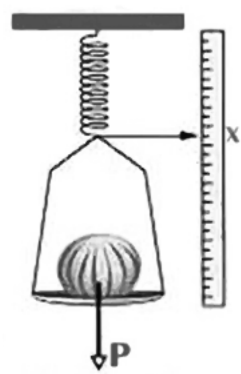
En el caso de las funciones que pueden expresarse mediante una fórmula, para expresar que la variable y es función de la variable x, se suele escribir $y = f(x)$, donde la f indica una cierta ley que permite calcular y cuando se van dando valores de x.

ACTIVIDAD 16

Volvamos a trabajar con temperaturas, pero esta vez, de una cantidad dada de agua. En un recipiente se calentó agua durante 1 hora y se observó cómo variaba la temperatura del agua a través del tiempo.

Algunos datos obtenidos se consignaron en la siguiente tabla:

Tiempo (en minutos)	0	10	20	30
Temperatura (en °C)	35	55	75	95



a) Realizá la gráfica correspondiente a la situación planteada.

b) Expresá la temperatura en función del tiempo mediante una fórmula y explicá cómo obtuviste dicha fórmula.

c) Se sabe que el agua se congela a 0 °C y se evapora a 100 °C. ¿Cómo condicionan estos datos a la función obtenida en b)?

d) Transcurridos 50 minutos ¿cuál es la temperatura del agua? Explicá por qué.

5. Funciones lineales

Entre las funciones que pueden darse por una fórmula, se encuentran las funciones lineales y para trabajar con ellas es necesario comprender los rasgos o características que las distinguen.

Por ejemplo, cuando se suspende un objeto de un resorte, el resorte se alarga. El alargamiento depende del peso del objeto, es decir, es función del peso.

En esta situación puede identificarse el peso como variable independiente y la longitud del alargamiento como variable dependiente.

A partir de resultados experimentales se ha comprobado que el alargamiento del resorte es directamente proporcional al peso del cuerpo que se suspende por lo que es posible calcular el alargamiento multiplicando el peso por una constante *k*.[10]

A partir de considerar la proporcionalidad entre el peso de un objeto que se suspende y la longitud del estiramiento del resorte, se construyó un instrumento que mide pesos, se denomina dinamómetro. Consiste en una escala en la que figuran los pesos de los objetos que se suspenden, es decir, se considera como variable dependiente la longitud del estiramiento y como variable independiente el peso del cuerpo.

Para poder ejemplificar las ideas matemáticas que estamos desarrollando, supongamos que contamos con un resorte en el que se pueden suspender cuerpos que no superen los 2 kg de peso, donde se realizaron las siguientes mediciones:

Peso del objeto (kg)	0, 050	0,250	0,400	0,600
Longitud del estiramiento (cm)	0, 4	2	3,2	4,8

Si bien la información que puede proveer una tabla de valores es acotada y no anticipa el comportamiento de la función para valores que no se encuentran tabulados, las experimentaciones realizadas permiten determinar la fórmula correspondiente. Por ejemplo, si en este caso se designa con ***x*** a los valores que toma el peso y con ***y*** a la longitud del estiramiento, la fórmula que expresa esta función sería:

$$y = f_{(x)} \text{ es } y = 8\,x$$

10. Puede resultarte útil, volver sobre lo visto en la Unidad 1, acerca de las funciones de proporcionalidad.

Según las características del resorte se pueden suspender cuerpos que no superen un peso determinado, por lo que también puede identificarse el *dominio* de esta función que estará dado por los números reales tales que $\boldsymbol{0 \leq y < 8}$.

Si se quiere conocer la longitud del resorte estirado sabiendo que la longitud cuando no se suspende ningún cuerpo es de 10 cm, la fórmula correspondiente es $\boldsymbol{y = 8x + 10}$

Si se consideran las mediciones anteriores puede confeccionarse la siguiente tabla.

Peso del objeto (kg)	0,050	0,250	0,400	0,600
Longitud del resorte (cm)	10,4	12	13,2	14,8

Dado que las fórmulas obtenidas son de la forma $y = mx + n$, es posible afirmar que los ejemplos analizados corresponden a situaciones de variación uniforme o lineal.

También puede analizarse si la razón entre la diferencia entre dos valores cualesquiera de la variable dependiente y la diferencia entre los correspondientes valores de la variable independiente es constante. Por ejemplo,

-En el primer caso: 2 – 0, 4/0,25 - 0,05 = 3,2 – 0,4/0,4 – 0,05 =… = 8

-En el segundo caso: 2 – 0, 4/0,25 - 0,05 = 3,2 – 0,4/0,4 – 0,05 =... = 8

Al trabajar en matemática con funciones, muchas veces los valores no provienen de mediciones. Por ejemplo, si se quiere saber qué números reales cumplen la condición $y = 8x + 10$, pueden proponerse números que carecen de sentido al considerar el caso del resorte. Es el caso de considerar valores negativos, cuando estamos trabajando con pesos y la escala que marca el estiramiento inicia en el 0.

X	-2	-1,5	.....	3	3,5
Y	-6	-2	.....	34	28

Al estudiar las funciones lineales intramatemáticamente, los valores de las variables tanto independiente como dependiente, pueden tomar cualquier número real. Por esto, el dominio de esta función es el conjunto de los números reales y la imagen también es el conjunto de los números reales, ya que a partir de los valores del dominio pueden obtenerse todos los números reales.

Si en las funciones cuyo dominio y cuya imagen es el conjunto de los números reales se cumple que el cociente entre la diferencia entre dos valores cualesquiera de la variable independiente y la diferencia entre los correspondientes valores de la variable dependiente es constante, la función de denomina función lineal. En el ejemplo: 2 – 0, 4/0,25 - 0,05 = -16/-2 – 0,05 =… = 8

Otra manera de expresar la afirmación anterior es: en una función lineal, a incrementos iguales de una variable, corresponden incrementos iguales de la otra. Si se designa Δ[11] y al incremento de la variable dependiente y Δx al incremento de la variable dependiente: $\Delta y / \Delta x$ = constante= m

$$\Delta y / \Delta x = m \Rightarrow \Delta y = m\ \Delta x \Rightarrow y - y_0 = m\ (x - x_0)$$

Si se considera $x_0 = 0$, $y_0 = n$, reemplazando x_0 e y_0 se obtiene $y - n = m\ (x - 0) \Rightarrow y - n = m.\ x - 0 \Rightarrow y = mx + n$, que es la fórmula correspondiente a una función lineal.

ACTIVIDAD 17

Tratemos de aplicar estos conceptos, en una nueva situación contextualizada.

Se cuenta con un silo cuya capacidad total es de 500 toneladas. Al momento contiene 25 toneladas de trigo, cuando se abre una compuerta que vierte en su interior 5 toneladas por minuto.

a) ¿Cuánto trigo hay en el tanque luego de 35 minutos? Registrá tus cálculos y completá la tabla.

Trigo (toneladas)				
Tiempo (minutos)				

b) ¿Existe una fórmula que permita calcular cuánto trigo hay en el silo, en función del tiempo? ¿Cuál es?

c) Graficá la situación planteada.

d) De acuerdo con el gráfico, respondé

-¿Al cabo de cuánto tiempo el silo se llena?

-ranscurridas dos horas, ¿cuánto trigo hay en el silo?

11. La letra griega Δ (que se lee “delta”) se utiliza en física para indicar aumentos o disminuciones, es decir, incrementos. Es importante tener en cuenta que los incrementos pueden ser positivos, negativos o nulos.

El campo vecino cuenta con otro silo que tiene la misma capacidad que el anterior. Está totalmente lleno de maíz y se vacía a razón de 5 toneladas por minuto.

a) ¿Cuál será la fórmula que permite calcular la cantidad de maíz que queda en el silo en función del tiempo? Explicá tus respuestas.

b) Graficá la situación planteada.

c) ¿Al cabo de cuánto tiempo el depósito queda vacío?

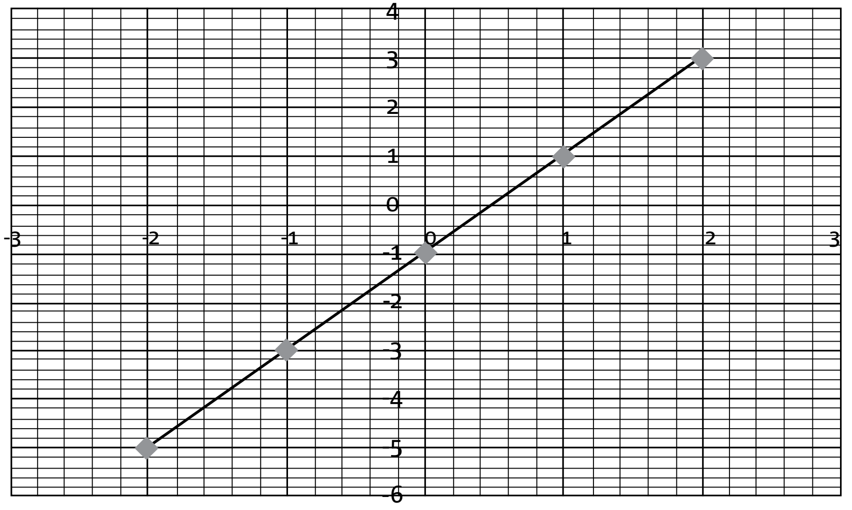
6. Gráficas cartesianas de funciones lineales

La representación gráfica de las funciones lineales es siempre una recta.[12] Esto hace que baste tomar dos puntos para poder representar la función.

Por ejemplo, si se considera la función $f_{(x)}$ cuya fórmula es $f_{(x)} = 2x - 1$ para realizar la gráfica, basta tomar los puntos

A = (0; -1) y

B = (1; 1)



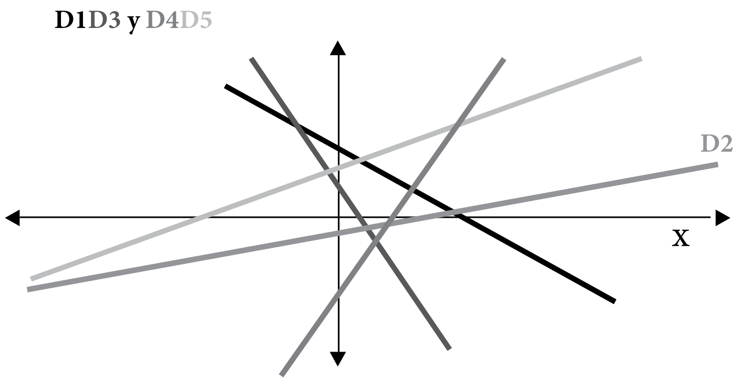
12. Para probar que la gráfica de una función lineal es una línea recta puede utilizarse el siguiente argumento:
Si (x; y) es un punto de la gráfica $f_{(x)} = 2x + 1$ y x=0, se obtiene que $y = f_{(0)} = 1$

Todo otro par de valores que cumpla con la condición de f(x) = 2 x - 1 pertenece a la misma recta.

ACTIVIDAD 19

Las rectas D1,…, D5 representan distintas funciones lineales, cuyas fórmulas son:

y = a1 x + b1,..., y = a5 x + b5



a) Ordenar los números a1,. . . . , a5 por orden creciente.

b) Ordenar los números b1,. . . . , b5 por orden creciente.

c) Registrá los argumentos que usaste para resolver la actividad. Compará tus argumentos con los de otros compañeros.

7. Tablas, gráficos y fórmulas

Como ya señalamos, al estudiar una función o tener que anticipar un valor en una variación, se pueden utilizar distintos registros: tablas de valores, gráficos o fórmulas.

En el caso particular de una función lineal, el análisis de los valores constantes de la fórmula permite vincular gráficas con fórmulas correspondientes a funciones lineales y también facilitar la representación de estas últimas.

Si se considera la fórmula y = mx + n, el número *m* que es la constante de la variación, se denomina *pendiente* de la recta y determina la inclinación de esta. En tanto que el número *n* se denomina la *ordenada al origen* y es el valor sobre el eje y por donde pasa el gráfico de la recta. Es decir, *n* es el valor que toma la función para $x = 0$.

En general, en una función lineal $f(x) = m\,x + b$:

Si $m>0$, la recta crece;

si $m<0$, la recta decrece, y

si $m=0$, la recta no crece ni decrece.

Si se considera que $\Delta x = 1$, la pendiente puede ser interpretada como el incremento de la variable independiente, lo que permite graficar una función lineal conociendo un punto de su gráfica y la pendiente m.

La idea de pendiente debe ser considerada desde diferentes formas:

-de acuerdo con el lugar que ocupa en la fórmula;

-como constante que resulta del cociente $\Delta y / \Delta x$

-en relación con el dibujo de la recta, ya que es una medida de la inclinación de esta.

ACTIVIDAD 20

En un pueblo A, la boleta de gas se factura a razón de \$ 1,5 el metro cúbico. En el pueblo B, la boleta de gas se factura a razón de \$ 1,2 el metro cúbico más \$ 50 de abono fijo.

Primeras preguntas:

a) Si se consumen 120 metros cúbicos, ¿cuál es el valor de la boleta en el pueblo A? ¿Y en el B? ¿Y si se consumen 170 metros cúbicos?

b) José y Carlos viven en el pueblo A. José consume el doble de metros cúbicos que Carlos. ¿Es cierto que debe pagar el doble?

c) Juana y Carla viven en el pueblo B. Juana consume el doble de metros cúbicos que Carla y dice que no paga el doble. ¿Será cierto?

d) ¿Qué cantidad de metros cúbicos consumió Claudio en el pueblo B si pagó \$ 230?

e) Dos personas gastaron la misma cantidad de dinero en gas, viviendo uno en el pueblo A y el otro en el pueblo B, usando la misma cantidad de metros cúbicos. ¿Es posible? ¿Cuánto gas consumieron y cuánto gastaron?

Otras preguntas:

f) Para resolver algunas de estas preguntas, un compañero decidió hacer un gráfico. ¿Cuál es tu opinión respecto a esta decisión? ¿Por qué?

g) En tanto, otro decidió buscar la fórmula que expresa cada una de las funciones. Encontrá las fórmulas.

h) ¿Cuál es el registro que te resulta más adecuado? ¿Por qué?

8. A modo de cierre

La Unidad 2 consta de dos partes, la primera toma el trabajo con expresiones algebraicas, en tanto la segunda, aborda las funciones en cuanto al contenido matemático.

Entonces, iniciamos el trabajo con expresiones algebraicas para poder abordar algunas situaciones intramatemáticas que nos habiliten a poner en evidencia, a través de generalizaciones, cierta característica de distintos tipos de razonamientos, indispensables para poder comunicar y validar las estrategias de resolución.

Avanzamos en el trabajo, usando distintos registros de las funciones, tomando el caso de la función lineal como ejemplo para su estudio. Tablas de valores, gráficas y expresiones algebraicas, fórmulas, pusieron estas ideas en tensión para su estudio.

A lo largo del recorrido propuesto, las actividades asociadas a estos contenidos, intentaron proponer un tratamiento más sistemático de la noción de variable, parámetro y dependencia, caracterización de dominios o conjuntos de definición, y los distintos registros ya mencionados, preparando el trabajo para la elaboración de modelos matemáticos simples de explicación de fenómenos.

ACTIVIDAD 21

En esta actividad te proponemos que reflexiones acerca de tu desempeño en relación con las siguientes cuestiones.

a) ¿Interpretaste la información contenida en los distintos registros?

b) Al avanzar con los textos teóricos, ¿lograste comprenderlos desde el primer intento?

c) ¿Pudiste operar algebraicamente y obtener resultados razonables?

d) ¿Qué considerás necesario seguir trabajando?

Para leer, después de todo…

El matemático, el físico, el ingeniero y el médico

Al matemático le gusta contar una anécdota referida a tres de sus colegas.

Dice el matemático: —El físico está convencido de que 60 es divisible por todos los números, porque ve que 60 es divisible por 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Para verificarlo, toma algunos otros números al azar, por ejemplo 10, 15, 20, 30. Como 60 también es divisible por estos, estima que los datos experimentales son suficientes.

Dice el físico: —Sí, pero miren al ingeniero. Sospecha que los números impares son primos. En todo caso, el 1 puede ser considerado como primo. Después vienen el 3, el 5 y el 7, que son indudablemente primos. A continuación viene el 9 que, en apariencia, no es un número primo. Pero el 11 y el 13 sí que lo son. Entonces, dice el ingeniero: "Volvamos a considerar el 9… Debo concluir que se trata de un error en el experimento".

Dice el ingeniero: —Es verdad, pero fíjense en el médico. Permite que un enfermo desahuciado de uremia coma puchero y el enfermo se cura. El médico escribe un artículo científico afirmando que el puchero cura la uremia. A continuación, le da puchero a otro urémico y este fallece. Por lo tanto, el médico corrige los datos: "el puchero es aconsejable en el 50% de los casos".

Khurguin, Ya. (1974). *Did you say mathematics?* Moscú: Mir, pp. 123-124. Traducción Edunpaz.

Unidad 3

Son sólidas las razones que sostienen la enseñanza de los contenidos que abordaremos en esta Unidad: la utilidad de la estadística y de las probabilidades en la vida diaria, su papel instrumental en otras disciplinas, la necesidad de un conocimiento vinculado con el estudio de sucesos ligados a lo aleatorio en el ejercicio de la ciudadanía, el papel de la estadística en el desarrollo de un pensamiento crítico.

Hoy la estadística se utiliza para describir los valores de datos económicos, sociales, biológicos o físicos y sirve para relacionar, analizar e interpretar dichos datos. A su vez, el desarrollo de la teoría de la probabilidad en el siglo XIX, aumentó las aplicaciones de la estadística pues el cálculo de probabilidades permite analizar la confiabilidad de los estudios estadísticos y determinar la cantidad de datos necesarios para realizarlos.

Sin embargo, es probable que no hayas trabajado con estos contenidos durante el paso por tu escolaridad primaria y secundaria. Por lo que nos proponemos orientar la tarea hacia el análisis exploratorio de datos, centrándonos en las aplicaciones y mostrando su utilidad a partir de áreas diversas. Se trata de introducir el trabajo de esta rama matemática, presentando las diferentes fases de una investigación estadística: planteamiento de un problema, decisión sobre los datos a recoger, recolección y análisis de datos, obtención de conclusiones sobre el problema planteado.

a) Analizá cada una de las siguientes situaciones y respondé a las preguntas en una hoja.

b) Discutí tus respuestas con otros compañeros y registrá los acuerdos o desacuerdos a los que arriben.

- El pronóstico meteorológico anuncia para nuestra localidad que hay 30% de probabilidades de lluvia para el sábado y 70% de probabilidades de lluvia para el domingo. ¿Esto significa que es seguro que lloverá el fin de semana?
- Algunas estadísticas muestran que muchos accidentes de tránsito se producen a menos de 140 kilómetros por hora. ¿Significa esto que es más seguro conducir a gran velocidad?
- En un trabajo estadístico del 2002 se informa que el 61% de las víctimas de los accidentes de tránsito fueron varones y el 39% mujeres. ¿Significa esto que las mujeres tienen menos probabilidades de sufrir un accidente de tránsito que los varones?
- Las últimas estadísticas afirman que el número de matrimonios es el doble que el de divorcios. ¿Se puede afirmar entonces que uno de cada dos matrimonios se divorcia?
- Si en un juego de generala sale generala servida de 6. ¿Se puede afirmar que es poco probable que salga un 6 en el siguiente tiro?

1. Estadística

Ya hemos mencionado que, desde la Antigüedad, aún antes del 3000 A.C, existen registros de datos numéricos. Podemos mencionar que los babilonios y los egipcios ya analizaban datos de población y, en el 600 a.C., los griegos realizaban censos cuya información se utilizaba para cobrar impuestos, práctica que el imperio romano extendió a todos los territorios que conquistaba.

El vocablo censo proviene del latín *census*, que era un registro en el que los jefes de las familias romanas debían inscribirse, anotar a las personas que componían su familia y sus bienes. Este registro debía actualizarse cada cinco años y servía para conocer la población de Roma y la fortuna de los ciudadanos.

El emperador Augusto –contemporáneo de Cristo– mandó realizar una gran encuesta sobre las riquezas y demás posesiones del Imperio Romano. Al final de meses de trabajo tuvo que contentarse con una enumeración sistemática y ordenada de datos, ya que hasta comienzos del siglo XVII era la única manera de dar cuenta de la información solicitada, es decir, de forma meramente descriptiva.

Se puede afirmar que la estadística estudia las mejores formas de registrar y analizar datos, a partir de los cuales establece conclusiones. En el siglo XIX, los investigadores de distintas ramas de la ciencia contribuyeron a profundizar las ideas básicas de la estadística para estudiar los fenómenos de las ciencias naturales y sociales, brindando herramientas para el diseño de experimentos y la toma de decisiones sobre los fenómenos estudiados.

Entonces, podemos decir que la estadística es una rama de la matemática que se ocupa de reunir, organizar y analizar datos numéricos para facilitar la toma de decisiones en ámbitos económicos, políticos y sociales muy diferentes.

Antes de ponernos a trabajar, vamos a revisar tres aspectos importantes:

I. ¿Cómo se describe de la mejor manera la muestra estudiada?

Los datos, la información obtenida a través de diferentes dispositivos, hay que ordenarlos, agruparlos y determinar ciertos números –parámetros– que describan la muestra en forma clara. Este es el objetivo que se plantea la denomina *estadística descriptiva.*

II. En función de la información obtenida, ¿qué conclusiones se pueden deducir o inferir sobre la totalidad del colectivo en cuestión y no sólo sobre la muestra?

Este tipo de cuestión es abordada por tareas en las que se emplea la *inferencia estadística,* que en la actualidad, posee un fuerte sostén matemático basado en la Teoría de la probabilidad.

III. ¿Cómo se deben considerar las muestras y cómo se seleccionan para que proporcionen información confiable sobre el colectivo que se desea indagar? Esta problemática corresponde a la parte de la estadística que se conoce con el nombre de *diseño de experimentos.*

Los conceptos básicos que debés conocer son

POBLACIÓN
Es el conjunto de personas, animales, objetos, lugares, etc. sobre los que se estudia determinada característica

INDIVIDUO
Es cada integrante de la población

VARIABLES ESTADÍSTICAS
Son los datos o características que son objeto de estudio de una población

MUESTRA
Es un subconjunto representativo de la población, elegido al azar

CUANTITATIVAS
Son aquellas variables que admiten cuantificación, pueden ser contadas.
Ej: Altura, Peso, Cantidad de Hijos, Calificaciones, etc.

CUALITATIVAS
Son variables a las que no podemos asignar un valor numérico.
Ej: Sexo, Profesión, Color de Piel, etc.

DISCRETAS
Son aquéllas que sólo pueden tomar valores enteros, por ejemplo: Número de Hermanos, Cantidad de Libros de una Biblioteca.

CONTINUAS
Son las que pueden tomar valores intermedios entre dos enteros, ejemplos son: Altura, Peso, Dinero depositado en una cuenta, etc.

Un primer paso de un estudio estadístico es determinar qué y cuánta información hay que reunir pues, en muchos casos, hay que realizar encuestas, registrar observaciones, realizar experiencias de laboratorio que involucran mediciones, registrar datos de archivos, etc.

Otro elemento para destacar. Un experimento es una operación que puede conducir a varios resultados posibles. Estos resultados posibles constituyen el *llamado espacio muestral del experimento*.

Vamos a explicar el esquema anterior, partiendo de considerar que el conjunto de *individuos* cuyas características se quieren estudiar se denomina *población*. Si la población que interesa estudiar es muy numerosa, el proceso de obtención de información es complejo o caro, o se desea tener información rápidamente, sólo se recogen los datos de una parte de esa población que se toma como muestra. Para seleccionarla es importante considerar su tamaño y cómo se eligen sus elementos para que sea representativa, ya que las características de la población se van a determinar analizando las características de esa muestra.

Por ejemplo, si se estudia el estado de salud de los niños menores de 6 años de una ciudad de 50.000 habitantes, tomar 100 casos no sería suficiente y las conclusiones variarían si los niños de la muestra fueran todos menores de un año o vivieran en una zona de riesgo sanitario. El peso y la estatura son variables que interesa registrar y las medidas que se obtengan serán los datos.

Se llama variable a aquella característica de los individuos de una población que interesa determinar y el valor o medida que toma la variable para cada individuo de la muestra es un dato. Si los individuos de la muestra se eligen al azar se dice que la muestra es *aleatoria*.

Los datos recogidos a través de encuestas, observaciones o experiencias, se organizan de modo que su interpretación sea más rápida y clara. Dependiendo del tipo de variable que interesa analizar, los datos pueden ser numéricos o no.

Si los valores o medidas de una variable se expresan con números, ésta se denomina *variable cuantitativa*. Si estos son números enteros la *variable es discreta* y si entre dos valores de la variable siempre existe otro valor posible es *continua*. La variable se denomina *cualitativa* si se expresa con palabras. Por ejemplo, la profesión es una *variable cualitativa*, mientras que la cantidad de hijos de una familia o el peso de una pieza de metal son *cuantitativas*.

Más allá de tus primeras respuestas, la propuesta es avanzar acercándote los métodos de estudio y análisis propios de la estadística.

1.1. Interpretación de la información

Cuando se investiga un problema que interesa estudiar y se obtiene un conjunto grande de datos, es necesario trabajar con ellos para elaborar información que permita tomar decisiones.

ACTIVIDAD 2

Para ampliar los conocimientos que se tenían sobre el desarrollo poblacional y las consecuencias de los movimientos migratorios, en 1869 se realizó el primer Censo Nacional en la Argentina. Consideren la información de la tabla, que muestra algunos indicadores demográficos entre 1869 y 1991,[13] para responder a las preguntas en una hoja.

AÑOS	PORCENTAJE DE		ESPERANZA DE VIDA AL NACER (EN AÑOS)	TASA GLOBAL DE FECUNDIDAD (HIJOS/MUJER)	PORCENTAJE DE EXTRANJEROS EN LA:	
	ANCIANOS	JÓVENES			POBLACIÓN TOTAL	POBLACIÓN ANCIANA
1869	2,2	42,8	32,9	6,8	12,1	17,1
1895	2,5	40,3	40,0	7,0	25,4	27,1
1914	2,3	38,4	48,5	5,3	29,9	51,0
1947	3,9	30,9	61,1	3,2	15,3	56,6
1960	5,6	30,8	66,4	3,1	13,0	49,3
1970	7,0	29,3	65,6	3,1	9,5	39,6
1980	8,2	30,3	68,9	3,3	6,8	25,2
1991	8,9	30,6	71,9	2,9	5,0	15,9

a) ¿Qué indicadores crecieron en estos años? ¿Cuáles decrecieron? ¿A qué creés que se debe esa evolución?

b) ¿En qué período considerás que llegaron más extranjeros a la Argentina? Podés confirmar tu decisión consultando alguna otra fuente.

c) De la información obtenida en el censo 2001 puede obtenerse un nuevo

13. Información extraída de la publicación *Estructura demográfica y envejecimiento en la Argentina*. Serie Análisis Demográfico Nº 14. INDEC. En el mismo, se considera como Ancianos a las personas mayores de 65 años y jóvenes al grupo etario de 16 a 26 años.

valor para la “esperanza de vida al nacer”, ¿entre qué valores piensan que podría estar? ¿Por qué?

Si pueden, verifiquen su estimación.

d) ¿Cuáles podrían haber sido las preguntas realizadas en el censo que dieron lugar a esta información?

ACTIVIDAD 3

I.- Para establecer algunas relaciones entre los resultados de los censos nacionales y las características de la comunidad de la universidad es necesario recolectar alguna información.

a) Realicen una encuesta entre los compañeros de clase para indagar cuál es el número de hijos por familia y registren en una hoja la información obtenida.

b) ¿Cuál es la cantidad de hijos que aparece más frecuentemente? ¿Y con menos frecuencia?

c) Pensás que las mamás de tus compañeros de clase, tienen más o menos hijos que las madres que respondieron al censo en 1869? ¿Y en 1960? ¿Por qué?

d) Considerás que si hubieran realizado la encuesta a sus abuelas, preguntándoles cuántos hijos tuvieron sus madres, ¿hubieran obtenido los mismos resultados? ¿Por qué?

Antes de continuar

II.- Respondé

a) ¿Cuál es la diferencia entre analizar los valores obtenidos en un censo nacional y los obtenidos en la encuesta realizada en la actividad 3?

b) ¿Pensás que la muestra utilizada para realizar la encuesta es representativa de la población de todas las familias de la universidad? ¿Por qué?

2. Organización y representación de datos

Para cada medida de la variable en estudio, se registra el número de individuos que tomaron ese valor, o intervalo de valores, en una tabla de distribución de frecuencias.

Por ejemplo,

Número de hijos	Frecuencia
0	25
1	28
2	49
3	13
4	30
5	5

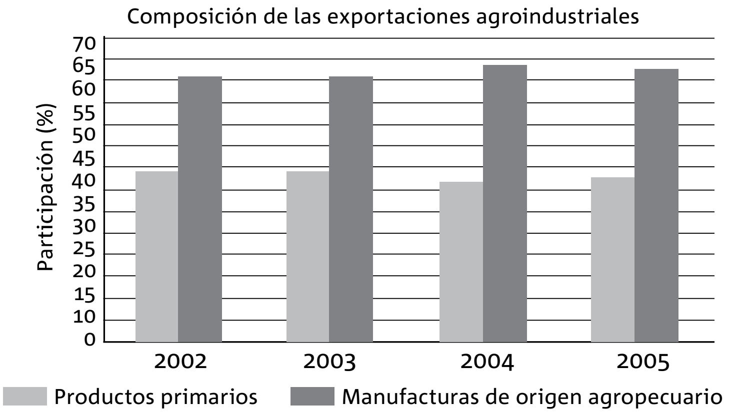
En esta muestra de 150 familias, 25 de los entrevistados no tienen hijos, 28 tienen uno solo, 49 tienen dos, etc.

Esta organización permite identificar los valores máximos y mínimos que toma la variable, su diferencia y cuál es el valor más frecuente. Si se necesita comparar las frecuencias para distintos valores de la variable en relación con el total de datos de la muestra, es posible calcular las frecuencias relativas.

El cociente entre la frecuencia para un valor de la variable y el número total de datos se denomina *frecuencia relativa*. Esta razón, que puede expresarse como un porcentaje, muestra en qué proporción se repite cada dato con respecto al total. Por ejemplo, en el caso de la muestra anterior, el 32,7% de las familias tienen 2 hijos.

ACTIVIDAD 4

Antes de continuar, ¿cómo se llega a determinar que el 32,7% de las familias tienen 2 hijos? No olvides registrar tus cálculos.



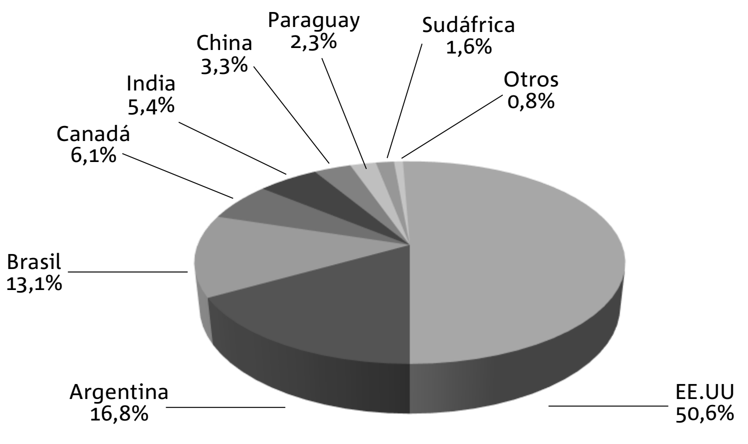
3. Distintos tipos de gráficos

Para comunicar la información obtenida y realizar un análisis más rápido de los datos, es común construir distintos tipos de gráficos. En los medios de comunicación es frecuente encontrar representaciones que permiten entender con un golpe de vista la información que se quiere transmitir. Pero en esos casos es importante analizar con cuidado dicha representación ya que el uso que se haga de la escala puede dar lugar a interpretaciones erróneas.

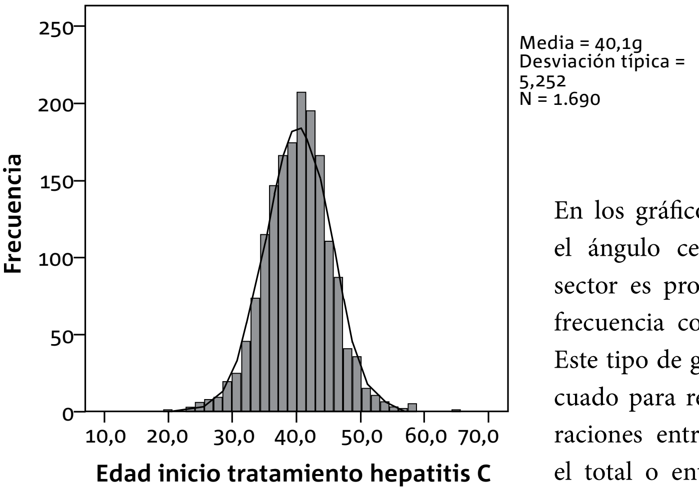
Los gráficos de barras se utilizan para representar variables cualitativitas o cuantitativas. En ellos, la altura de cada barra es proporcional al valor de la variable o a la frecuencia correspondiente. Este tipo de gráficos también permite visualizar la evolución de un fenómeno durante un cierto período de tiempo.

En un pictograma se utilizan imágenes alusivas a la información que se presenta, las que se repiten o agrandan proporcionalmente a los valores que representan. En general, estos gráficos son poco precisos.

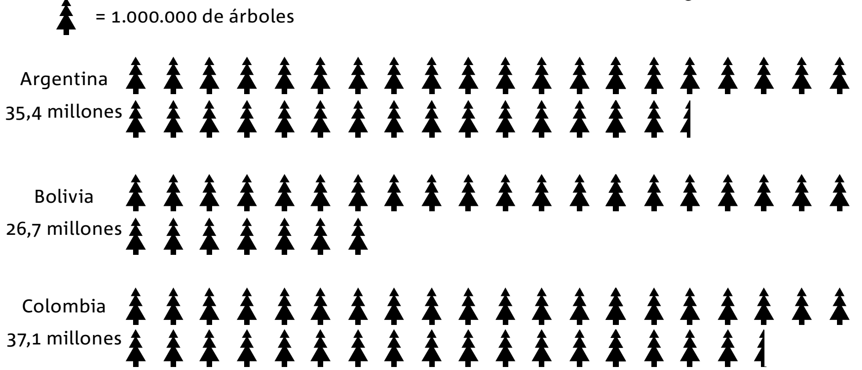
Área global de cultivos transgénicos, por país
(sobre 114,3 millones de hectáreas)



Otros: Uruguay, Australia, Méjico, Rumania, Filipinas, España, Colombia, Chile, Honduras, Portugal, Alemania, Francia, República Checa, Eslovaquia, Polonia.
Fuente: ISAAA, 2007



En los gráficos de sectores, el ángulo central de cada sector es proporcional a la frecuencia correspondiente. Este tipo de gráficos es adecuado para realizar comparaciones entre las partes y el total o entre situaciones similares representadas con círculos de igual diámetro.



Los histogramas se usan para representar variables cuantitativas continuas, o discretas cuando toman muchos valores, lo que lleva a agrupar los datos en clases. Cada clase, se representa con un rectángulo de área proporcional a la frecuencia correspondiente.

ACTIVIDAD 5

Las notas que obtuvieron los alumnos en una evaluación de matemática en 1° año del bachillerato fueron las siguientes: 5-3-4-1-2-8-9-8-3-6-5-4-1-7-2-1-9-5-10-1-8-3-8-3-2.

a) Realizá la tabla adecuada a dichos datos con las frecuencias absolutas, relativas y porcentuales.

b) Construí el gráfico más adecuado para representar dicha situación.

ACTIVIDAD 6

Las edades que se registraron en un grupo familiar fueron las siguientes: 3-2-11-4-3-2-4-5-6-7-3-4-22-4-5-3-2-5-6-27-15-4-21-12-4-5-3-6-29-13-6-17-6-13-6-5-12-26-12

a) Construí la tabla estadística de datos agrupados.

b) Construí un gráfico adecuado a la situación.

ACTIVIDAD 7

a) Seleccioná alguno de los gráficos del texto y explicá la información que contiene.

b) Buscá distintos gráficos estadísticos en la prensa escrita, indicá de cuál se trata e identificá sus características.

Antes de continuar,

c) Investigá a qué se denominan parámetros de posición central. ¿A qué refieren los términos: media, mediana y moda?

ACTIVIDAD 8

La Encuesta Permanente de Hogares (EPH) es un programa nacional cuyo propósito es el relevamiento sistemático y permanente de los datos referidos a las características demográficas y socioeconómicas fundamen-

tales de la población, vinculadas con la fuerza de trabajo. Su temática está orientada hacia la caracterización de la situación social integral de los individuos y los hogares, aunque los datos más difundidos son los relacionados con el mercado laboral.
En este sentido la Encuesta Permanente de Hogares Continua pretende conocer y caracterizar la situación de las personas y de los hogares (por ser estos los núcleos básicos de convivencia en donde los individuos se asocian) según su lugar en la estructura social.

Para uno de los fines de la EPH se entrevistaron 1.000 familias de la ciudad de Mendoza para saber cuántos hijos tiene cada familia. Los datos obtenidos fueron: 250 familias no tienen hijos, 200 tienen 1 hijo, 300 tienen 2 hijos, 160 tienen 3 hijos, 50 tienen 4 hijos, 20 tienen 5 hijos, 10 tienen 6 hijos, 7 tienen 7 hijos, 2 familias tienen 8 hijos y una familia tiene 9 hijos.

a) Organizá esta información y determiná la moda, la mediana y el promedio (media aritmética) de esta muestra.

b) ¿Cuál de estos parámetros te parece más representativo de la situación? ¿Por qué?

4. Análisis de datos

En algunos casos, frente a un conjunto de datos es suficiente con organizarlos para extraer conclusiones. En otros, resulta útil resumir las características de la muestra estudiada para compararlas con otras. Así, en estadística, se trabaja con algunos números llamados medidas de posición o medidas de tendencia central, que describen cómo se ubican / distribuyen / posicionan los datos de una muestra.

Por ejemplo, en el caso del estudio de salud de los niños de una cierta localidad, interesa conocer, para cada edad, si las medidas de los pesos se ubican alrededor de un valor u otro. Sin embargo, calcular el promedio (media aritmética) de estas medidas no sería suficiente ya que si hay niños con sobrepeso y otros desnutridos, estos valores podrían compensarse. Así, es necesario conocer, además, si hay una medida que se repite con mayor frecuencia y cómo se distribuyen esos valores.

La moda es aquel valor de la variable que aparece con mayor frecuencia en la distribución.

Por ejemplo, en el caso de la tabla presentada en el apartado 2. Organización y representación de los datos, la moda es 2 hijos.

En tanto, la <u>mediana</u> de un conjunto de medidas es un valor que divide a este conjunto de datos, ordenados de menor a mayor, en dos grupos que tienen la misma cantidad de elementos. Si la muestra tiene un número impar de valores uno de ellos queda en el centro y es la mediana. Si el número de datos es par, se toma el promedio de los dos datos centrales. En el caso del ejemplo recién considerado de la distribución de frecuencias, como son 150 datos no es necesario ordenarlos, basta encontrar cuáles son los datos que se encontrarían en las posiciones número 75 y 76 y hacer el promedio que, en este caso, es 2.

Nº de orden	1 2 3…. 25 26 27…..53 54 55 …..**7576**77 ….102 103….
Cantidad de hijos	0 0 0…. 0 1 1 ….. 1 2 2 …..**22**2 … 2 3 ….

La <u>media aritmética</u> de un conjunto de datos es la suma de dichos valores, dividida por el número de datos en el conjunto. Por ejemplo, si los datos corresponden a una variable discreta como en la tabla de frecuencias se calcula así:

$$\text{Media} = \underline{0 \cdot 25 + 1 \cdot 28 + 2 \cdot 49 + 13 \cdot 3 + 30 \cdot 4 + 5 \cdot 5} = \underline{310} = 2{,}067 \quad 150 \quad 150$$

En este caso, como se trata del número de hijos, el valor se aproxima a 2.

En general, se anota media = $\dfrac{\sum xi \cdot fi}{\sum fi}$ donde x_i es cada valor de la variable y f_i la frecuencia correspondiente.[14]

La elección de una medida de posición adecuada para describir un conjunto de datos depende del tipo de variable que se está estudiando y de la forma que tiene la distribución de frecuencias. Para una variable cualitativa, sólo es posible determinar la moda y sólo es un buen indicador del centro de los datos cuando hay una frecuencia dominante y los datos son numerosos. Si una distribución es asimétrica o tiene valores muy chicos y muy grandes, el cálculo de la media no

14. El símbolo Σ se lee sumatoria e indica que se deben sumar los distintos valores que se indican.

resulta significativo; cuanto más simétrica es la distribución, la media, la moda y la mediana tienen valores muy similares o coincidentes.

ACTIVIDAD 9

A) Revisá tus respuestas de la actividad 7.a) y 7.b)

b) Un compañero organizó esa información de la manera que aparece a continuación, con la tabla y el gráfico. Respondé:

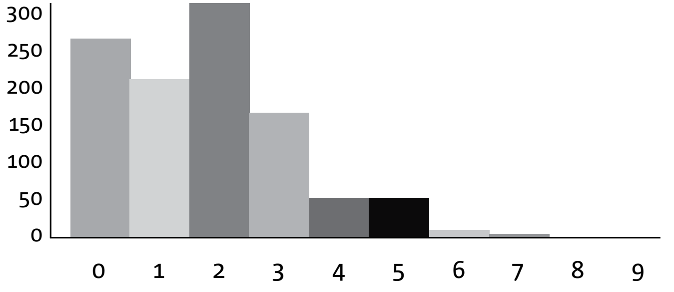
-¿Qué significa 3,9 cantidad promedio de hijos?

-¿Cuál o cuáles de las tres medidas estadísticas representa mejor a la muestra en el contexto de estudio planteado en la actividad 5? ¿Por qué?

-¿Cuál podría ser la razón por la que se tome esta variable de estudio? ¿Qué tipo de variable es?

-¿Cuál es la población referida a esta muestra?

Cantidad de hijos	Frecuencia
0	250
1	200
2	300
3	160
4	50
5	20
6	10
7	7
8	2
9	1



Prestá atención a la siguiente situación, sobre todo a los valores numéricos y las conclusiones.

Dos empresas de espectáculos realizaron, cada una, en el mes de diciembre, 7 presentaciones de bandas internacionales muy populares para los adolescentes argentinos en dos clubes muy importantes de la ciudad, A y B. Los organizadores comunicaron a los periodistas que, en ambos casos, asistieron en promedio 11.950 jóvenes. El detalle de la concurrencia para uno de los clubes fue: 10.150 chicos en la primera presentación; 12.000 jóvenes en las tres siguientes y 12.500 en los tres espectáculos restantes. En el otro club, concurrieron 13.150 chicos a ver la primera banda, 27.000 adolescentes presenciaron los dos espectáculos siguientes, sólo 3.000 chicos asistieron al cuarto evento y 4.500 a los tres últimos espectáculos que ofreció este club.

Estos dos clubes siempre compitieron con respecto a las presentaciones que ambos ofrecen. Los periodistas de espectáculos comentaron en un programa de televisión que les resultaba “extraño” que, en ambos casos, el promedio de jóvenes que asistieron a sus respectivas funciones... ¡fuera el mismo! ¿Por qué se habrán extrañado por este dato?

a) ¿Cómo explicarías la respuesta a esa pregunta?

b) Las medidas de posición, ¿siempre tipifican a la muestra en estudio? ¿Por qué?

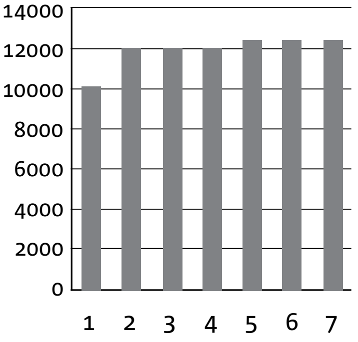
Las medidas de centralización no son suficientes como herramientas en la exploración de la variable de estudio y la comprensión de la situación involucrada, lo que nos pone frente a la necesidad de buscar nuevas medidas estadísticas que sí representen a la muestra estudiada permitiendo así comprenderla mejor, emitir opiniones fundamentadas y hacer algunas inferencias sencillas al respecto.

Al resolver, es posible que hayan intentado explicar la situación apelando a las medidas de posición central conocidas o realizando los gráficos, en ambos casos:

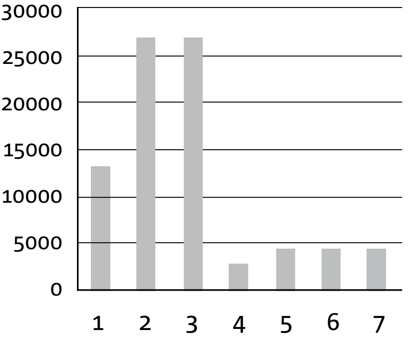
-La moda igual a la mediana en cada uno de los casos (en el Club A: Mo=Me=12000; en el Club B: Mo=Me=4500).

-El promedio o la media de ambas distribuciones es, efectivamente, 11.950 jóvenes.

Los gráficos son:



Club A



Club B

Se puede advertir que las distribuciones son muy diferentes y que los datos que otorgan las medidas de posición central no dan respuesta a la situación planteada observando la necesidad de disponer de "otras medidas estadísticas" que representen mejor el comportamiento que se está estudiando. Además, se debe tener en cuenta que los valores, si bien las barras son similares, no responden a las mismas cantidades.

ACTIVIDAD 11

Respondé:

a) Averiguá las "distancias" de cada valor de la variable de estudio respecto a un valor de centralización, como por ejemplo la media.

b) ¿Es útil para explicar la situación calcular un "promedio" de las distancias en cada caso?

5. Medidas de dispersión

Aun cuando se calculen la media, la mediana y la moda estos números no indican si los datos están acumulados o dispersos en un amplio intervalo de valores. Para tener una mejor idea de la naturaleza de los datos se necesita conocer la medida de la dispersión de los datos o su variabilidad.

Aunque en ambos clubes la media es la misma, en A los datos están más acumulados alrededor del valor central que en B, y una medida de la variabilidad del Club B debe ser mayor que la de A.

Una forma de cuantificar esta diferencia es calcular el promedio de las diferencias entre cada uno de los valores y la media. Como al calcular las diferencias de los distintos valores de la variable con la media algunos resultados son positivos y otros negativos y algunos podrían compensarse, se toman los cuadrados de estas diferencias.

Número de clases

$$\text{Varianza} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2\cdot f_i$$

frecuencia de la clase i

número de datos *marca de la clase i* *media aritmética*

La varianza es una buena medida de la dispersión de los datos, sin embargo, tiene un problema: el resultado no se encuentra en las mismas unidades que los datos originales pues se elevaron al cuadrado. Por ejemplo, si los datos se refieren a pesos expresados en kilogramos, la varianza quedaría en kg · kg y, por esta razón, se define la *desviación estándar* como la raíz cuadrada de la varianza.

La desviación estándar se anota con la letra griega sigma σ y, para calcularla, se encuentra la raíz cuadrada de la varianza:[15]

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}\frac{(\bar{x}-x_i)^2\cdot f_i}{n}}$$

Cuando la dispersión es muy pequeña, la medida puede aproximarse mucho a los valores individuales que se tienen en el conjunto y se dice que las medidas de posición son confiables. Sin embargo, si la dispersión es grande es posible que la medida sea poco confiable.

15. ¿Te animás a leer la fórmula de la varianza? Es una buena manera de comenzar a explicarla.

a) Reunite con un compañero y calculen los desvíos de la situación planteada en la actividad 7.

b) A partir de los cálculos, reformulen sus respuestas, registrando su explicación.

Como ya mencionamos, se eleva al cuadrado para evitar valores negativos (también se podría haber tomado el valor absoluto de esas diferencias) y aun, según la distribución, la compensación de valores que, podría dar cero. La organización de la información permite avanzar:

CLUB A

Promedio de los desvíos =

$$\frac{(3240000x1+2500x3+302500+302500x2)}{7} = 593571{,}43$$

Este cálculo se realiza para evitar la influencia que el tamaño de la muestra tendría sobre esta medida estadística. El "promedio de desvíos" de cada valor de la muestra (variable de estudio), se llama *varianza (V).*

Como al elevar al cuadrado (desvíos cuadráticos) esas diferencias, queda elevada al cuadrado la unidad de la medida, en este caso "personas", es necesario resolver este problema y se hace extrayendo la raíz cuadrada, entonces:

$\sqrt{593571{,}43} = 770{,}44\ldots$

Presentación	Cant.de jóvenes	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
P1	10150	-1800	3240000
P2	12000	50	2500
P3	12000	50	2500
P4	12000	50	2500
P5	12500	550	302500
P6	12500	550	302500
P7	12500	550	302500

El desvío promedio de la cantidad de chicos que asisten a estos espectáculos es de **770,44 personas**, y a este valor se le llama *desvío estándar (D)*.

Para el otro CLUB B,

Se sigue aquí el mismo razonamiento anterior para indagar sobre cómo se comportan los desvíos, calculando ya directamente la varianza y el desvío estándar

Presentaciones	Cant.de Jóvenes	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$
P1	3000	-8950	80102500
P2	4500	-7450	55502500
P3	4500	-7450	55502500
P4	4500	-7450	55502500
P5	13150	1200	1440000
P6	27000	15050	226502500
P7	27000	15050	226502500

$$V = \frac{80102500x1+55502500x3+14400x1+226502500x2}{7} = 100150714{,}29$$

Y el desvío estándar D = √100150714,29 = **10007,53 personas**

Como puede verse, es mayor el desvío en la segunda distribución que en la primera; lo que significa que la segunda muestra es más dispersa que la primera y que, por lo tanto, el promedio de los valores de la variable en cuestión, no representa realmente a la muestra.

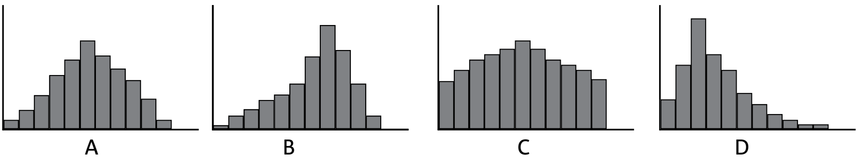
Para el caso, es más representativa de la muestra la moda o la mediana. ¿Por qué se afirma esto? En el primer caso la moda y la mediana coinciden, ambas son iguales a <u>12.000 jóvenes</u>. En el segundo caso ocurre lo mismo y el valor de esos parámetros es <u>4.500 jóvenes</u>. En este caso, el promedio sí es representativo de la primera muestra y no lo es de la segunda: 4.500 dista mucho de 11.950, justamente por ser esta última más dispersa.

Sin duda, en el primer caso los datos están menos dispersos que en el segundo. Una de las desventajas del valor medio es justamente la sensibilidad a valores extremos, a valores muy dispersos y en este ejemplo se observa claramente como la media es "tironeada hacia arriba" por estos valores extremos y por la dispersión de los valores en la muestra en cuestión.

Esto da cuenta de que se debe ser muy cauto cuando se recibe información sobre diferentes temas y esa información se basa en valores medios o promedios de las variables que se están analizando. Es importante, además, saber si las muestras que se usaron tienen o no un mayor o menor grado de dispersión para que, de este modo, pueda considerarse que los promedios u otros parámetros centrales son confiables.

ACTIVIDAD 13

En los siguientes gráficos se representan las inasistencias a clase de cuatro cursos durante un mes.



a) Respondé:

-¿En qué curso hubo mayor porcentaje de asistencia?

-¿En qué curso la asistencia fue más regular entre los alumnos?

-¿Qué curso tuvo el mayor promedio de asistencia?

b) Utilizá el concepto de desviación estándar para comparar las distribuciones del problema a). Registrá tus cálculos y observaciones.

ACTIVIDAD 14

El seguimiento del crecimiento de los bebés y niños se realiza tomando como referencia tablas y gráficos estadísticos que permiten evaluar la probabilidad de que un individuo pertenezca a un determinado grupo de peso o talla de la población tomada como referencia, teniendo en cuenta el conjunto de factores que influyen en cada comunidad.

a) Compará la información que se presenta en las tablas, interpretando el significado de la desviación estándar.

b) Para cada caso, buscá un ejemplo de la probabilidad de que un niño tenga determinado peso al nacer.

Peso al nacer en distintas regiones de la provincia de Jujuy, a distinta altura geográfica.

Regiones	Varones		Mujeres	
	N	x ± s	N	x ± s
Ramal (500m)	16.516	3,414 ± 0,483	15.790	3,295 ± 0,461
Valle(1.200m)	30.889	3,382 ± 0,470	29.885	3,269 ± 0,443
Quebrada(2.500m)	2.916	3,184 ± 0,449	2.826	3,054 ± 0,426
Puna(3.500m)	4.039	3,151 ± 424	3.946	3,039 ± 0,398

Álvarez, P. B., Dipierri, J. E., Bejarano, I.F., Alfaro, E. (2002). Variación altitudinal del peso al nacer en la provincia de Jujuy. *Archivos argentinos de Pediatría* 100(6):, pp. 440-447. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Emma_Alfaro/publication/228790779_Variacin_altitudinal_del_peso_al_nacer_en_la_provincia_de_Jujuy/links/00b7d514212609568b000000.pdf

Peso medio al nacer por trienios en 55.706 recién nacidos Maternidad Sardá C.A.B.A.

Periodo	N	x ± s
88-90	**14.350**	**3,243 ± 0,539**
91-93	**15918**	**3,250 ± 0,516**
94-96	**17231**	**3,280 ± 0,512**
97-99	**8185**	**3,286 ± 0,508**

ACTIVIDAD 15

En un supermercado se quiere determinar el número de cajas que es necesario tener abiertas para que los clientes no tengan que hacer cola en la caja más de 10 minutos y para que no haya cajeros desocupados durante mucho tiempo. Durante un día de semana se abren 10 cajas y, en distintos horarios, se toman tres muestras de 50 personas elegidas al azar y se registra el tiempo de espera en la cola antes de llegar a la caja.

a) Representá la información correspondiente a los registros de las 9, las 14 y las 19 horas en tres gráficos que permitan comprender rápidamente la situación de cada horario.

b) ¿Considerás que es necesario abrir o cerrar cajas en algún horario? ¿Por qué?

Muestra 9 horas		Muestra 14 horas		Muestra 19 horas				
min	frecuencia	min	frecuencia	Minutos				
[0,2)	5	[0,2)	10	15	9	21	17	18
[2,4)	7	[2,4)	13	20	12	5	7	11
[4,6)	7	[4,6)	13	15	18	10	7	13
[6,8)	5	[6,8)	6	12	13	9	10	15
[8,10)	6	[8,10)	5	16	15	18	14	10
[10,12)	7	[10,12)	2	12	11	9	12	10
[12,14)	5	[12,14)	1	10	10	8	15	15
[14,16)	3	[14,16)	0	11	9	14	11	10
[16,18)	4	[16,18)	0	8	11	16	14	14
[18,20)	1	[18,20)	0	15	5	10	8	9

c) Realizar un gráfico que reúna la información de las 3 muestras, ¿permitiría tomar una mejor decisión? ¿Por qué?

d) Si tuvieras que caracterizar la situación de cada horario sin recurrir al gráfico, ¿qué medidas de posición utilizarías? ¿Por qué?

6. Probabilidad

Si bien el estudio de las probabilidades comenzó asociado a los juegos de azar hace apenas un poco más de 300 años, sus aplicaciones son hoy indispensables tanto en el ámbito comercial como científico.

ACTIVIDAD 16

La elaboración de las bases del cálculo de probabilidades se debe a Blas Pascal que, en el siglo XVII, se interesó por los juegos de dados al resolver problemas como éste:

- ¿Cuántas veces será preciso tirar dos dados para que se pueda apostar con ventaja que, después de esas tiradas, se sacará un doble seis?

- ¿Cuál sería tu respuesta?

Debieron pasar doscientos años más para que esta teoría de probabilidades cobrara gran importancia, sobre todo por sus aplicaciones. Hoy, las compañías de seguros basan sus propuestas en cuidadosos análisis estadísticos sobre la frecuencia con la que ocurren ciertos accidentes y enfermedades y, por ejemplo, cobran más si consideran que es posible que una persona tenga un accidente, o se enferme, por el tipo de trabajo que realiza.

7. Espacio muestral y probabilidad

En una investigación los datos pueden obtenerse registrando hechos, como al entrevistar a un votante para consultarlo por su decisión o registrar los milímetros de lluvia caídos en un día. Otra forma es a través de experimentos, como cuando se pesa un ratón de laboratorio sometido a ciertas condiciones de alimentación o se saca un número de un bolillero.

En general, se denomina *experimento* al proceso por el cual se obtiene una medida o una determinada observación, *espacio muestral* al conjunto de todos los resultados posibles o *sucesos elementales* y *suceso* a cualquier conjunto de sucesos elementales.

La probabilidad de un suceso dado es la estimación matemática de la proporción de veces que éste ocurrirá o, lo que es lo mismo, su frecuencia relativa para un número significativo de resultados del experimento. Este enfoque de la probabilidad ligado al cálculo estadístico recibe el nombre de *frecuencial*.

Por ejemplo, si se deja caer una moneda al aire 10 veces, podrían aparecer 4 caras y 6 cecas, o 7 caras y 3 cecas y hasta todas caras. Sin embargo, si esta experiencia se realiza 100, 200 o más veces, el número de caras es prácticamente el 50% y se dice que la probabilidad de obtener cara es ½.

Otro ejemplo:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
⚁	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
⚂	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
⚃	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
⚄	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
⚅	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

					X					
					X					
					X	X				
				X	X	X				
				X	X	X				
			X	X	X	X	X			
		X	X	X	X	X	X	X		
		X	X	X	X	X	X	X		
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

ACTIVIDAD 17

¿Qué información se brinda de la tirada de dos dados? ¿Cuántos valores posibles hay? ¿Cuál tiene mayor probabilidad? ¿Por qué?

En el caso de los experimentos aleatorios, esto es, aquellos experimentos que tienen varios resultados posibles pero no se puede predecir el resultado, cuando se aumenta el número de pruebas, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse alrededor de un valor fijo, que se define como la probabilidad del suceso.

Se puede afirmar que si se trata de un suceso seguro, esto es, que ocurre el 100% de las veces que se realiza el experimento, su probabilidad es 1 y, si el suceso es imposible, su probabilidad es cero, y que la probabilidad de cualquier suceso es un número entre 0 y 1.

Si bien no es posible predecir el resultado de un experimento aleatorio éste siempre conduce a un conjunto de resultados bien identificados. Por ejemplo, si se arroja un dado de seis caras, tantas veces como uno desee, es posible identificar los resultados: 1…6 pero no es posible predecir qué número va a salir.

También existen situaciones que no pueden experimentarse en igualdad de condiciones pero tienen varios resultados posibles que se pueden identificar. Por ejemplo, este fin de semana se juega el partido Boca-River, ¿quién ganará? En este caso, si bien es posible identificar los resultados, no es posible repetir la experiencia pues incide el estado de la cancha, el tiempo, en qué cancha se juega, la formación del equipo, etc. Sin embargo, es posible analizar el resultado en términos de probabilidad a partir del análisis de los datos.

8. Cálculo de probabilidades

En el caso de experimentos aleatorios en los que todos los sucesos elementales ocurren con la misma frecuencia para un número suficientemente grande de experimentos, como cuando se tira un dado, se dice que los sucesos son equiprobables.

Cuando cada suceso elemental del espacio muestral tiene la misma probabilidad, y si el número de estos sucesos es N, la probabilidad de cada uno es 1/N.

Tomando como ejemplo, el tirar un dado, la probabilidad de que salga un número del 1 al 6 es 1/6.

Si un suceso S consta de n sucesos elementales equiprobables, su probabilidad es:	1/N + 1/N + ...+1/N = n · 1/N n veces

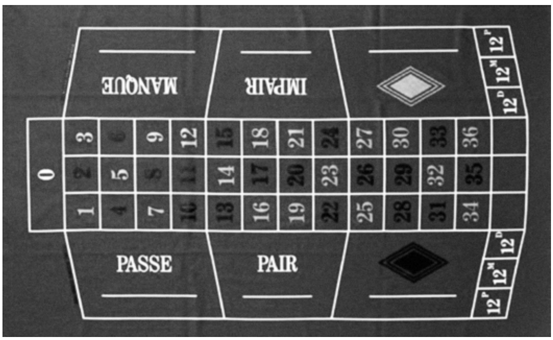
P (S) = n / N = número de sucesos elementales que componen S
Número total de sucesos elementales del espacio muestral

En general, la probabilidad de un suceso S se calcula como el cociente entre el número de casos favorables para S dividido el número de casos posibles. Esta manera de calcular la probabilidad de un suceso está ligada a la probabilidad teórica, que define el enfoque *laplaciano*.

ACTIVIDAD 18

Se lanzan dos dados de 6 caras numeradas del 1 al 6. Calculá la probabilidad de que la suma de los números obtenidos sea 8.

En todos los juegos de azar en los que se apuesta dinero, la cantidad que se reparte en premios es siempre menor que la que se recauda, lo que muestra que económicamente conviene más tener un casino que jugar en él. Sin embargo, muchas personas apuestan dinero regularmente pensando que, aunque pueden perder el dinero y la probabilidad de ganar puede ser muy pequeña, si ganan, ganarán mucho más que lo que hayan apostado. Pero ¿conocen realmente cuáles son sus probabilidades de perder?



Analizá el juego de la ruleta y respondé a las preguntas.

a) ¿Por qué en la ruleta se paga 35 veces la apuesta si se acierta un número (pleno) y sólo 5 veces si se acierta la línea o 2 veces si se apostó a docena o columna?

b) Imaginá que un jugador va al casino todas las semanas durante 50 años y apuesta $100 al número 13. De acuerdo con el cálculo de probabilidades, ¿cuántas veces se espera que gane? Si efectivamente sale el 13 con la frecuencia esperada, ¿le conviene apostar esa suma durante tanto tiempo? ¿Por qué?

8.1. Otras formas de asignar la probabilidad de un suceso

Una definición simple de probabilidad es la que ya compartimos, que asigna a cada suceso la razón entre el número de casos favorables para que ocurra y el número total de casos posibles siempre que los sucesos elementales sean equiprobables, esto es, que no exista ninguna razón para pensar que alguno tiene mayor probabilidad de ocurrir que otro.

Esta definición, que surgió al analizar los juegos de azar, es útil cuando se conoce cuál es el número total de casos posibles, como cuando se lanza un dado bien construido, se saca una carta de un mazo o se lanzan tres monedas.

Sin embargo, en muchas ocasiones los casos posibles son infinitos, o no se puede asegurar que todos los casos sean equiprobables, como cuando se quiere calcular la probabilidad de que una persona de una determinada población viva más de 70 años o se realiza una serie de mediciones para determinar la longitud de una pieza metálica.

En estos casos se realizan registros estadísticos para recoger datos y calcular la frecuencia relativa con la que se produce un determinado suceso. Cuando se repite n veces un experimento y el suceso S se produce en n_s ocasiones, el cociente n_s/n tiende a estabilizarse si n es suficientemente grande y se afirma que la probabilidad del suceso es, aproximadamente, su frecuencia relativa n_s/n.

Representación en barras de la frecuencia relativa al lanzar un dado n veces

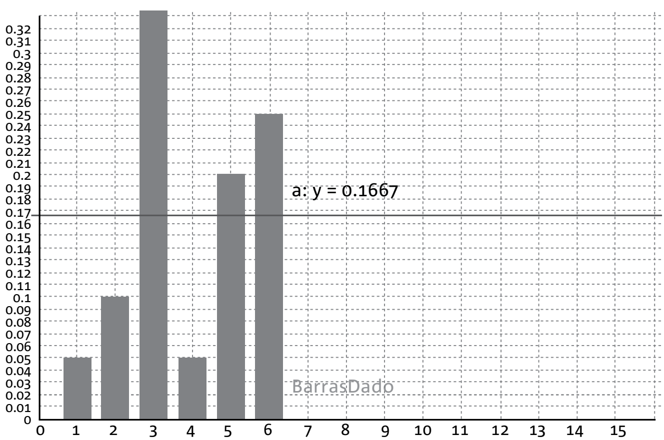
Mueva n lanzamientos para tomar el # de lanzamientos de un dado o escriba el número de lanzamientos en la caja de entrada

nLanzamientos = 20

Escriba el número de lanzamientos del dado luego enter 20

Tecla F9 si va a repetir el experimento el mismo número de veces

Obtener	Frecuencia Absoluta	Frecuencia relativa
1	1	0.05
2	2	0.1
3	7	0.35
4	1	0.05
5	4	0.2
6	5	0.25
Total	20	1



El problema de esta definición es que la aproximación se considera adecuada si el número de veces que se realiza el experimento es suficientemente grande, pero ¿qué significa suficientemente grande?

A pesar de estas dificultades para definir la noción de probabilidad, los matemáticos están de acuerdo con que, cualquiera sea la forma en la que se asigne la probabilidad a un suceso, ésta debe respetar principios o condiciones básicas bien definidas:

-La probabilidad de un suceso es un número comprendido entre 0 y1; es 0 si el suceso es imposible y es 1 si se trata de un suceso seguro.

-La probabilidad de un suceso es la suma de las probabilidades de sus sucesos elementales.

ACTIVIDAD 20

Se extrae una carta de un mazo de 40 naipes españoles. ¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los siguientes sucesos?:

a) El as de oros.

b) Un Rey.

c) Un número menor que 5.

d) Una carta de copas.

e) Una figura.

ACTIVIDAD 21

1) Cuando se juega al truco de a cuatro, ¿qué es más probable? ¿Cuánto más probable?

a. Que uno de los jugadores tenga un as y un tres o el siete de espadas y una figura.

b. Que un jugador tenga el as de espadas y otro el as de bastos o que cada jugador tenga un as.

c. Que dos jugadores tengan 33 de envido o que uno tenga flor.

d. ¿Cómo validarías tus respuestas?

2) Tomando en cuenta las reglas al jugar al truco, da ejemplos de:

a. un cálculo de probabilidades utilizando la fórmula del cociente entre casos favorables y posibles.

b. un cálculo de probabilidades que se base en el uso de frecuencias relativas.

c. que muestre que la suma de todas las probabilidades de los sucesos elementales del espacio muestral es 1.

9. A modo de cierre

En esta Unidad, avanzamos con el trabajo con dos ejes que se complementan, por lo que podemos organizarlos en:

-Estadísticas y Probabilidad: problemas y paradojas.

-Parámetros, gráficos

En la presentación de los temas se tomaron en cuenta diferentes enfoques recuperando las nociones matemáticas básicas. Por ejemplo, en el caso de la probabilidad, el enfoque frecuencial se presenta en combinación con la estadística, en tanto que el enfoque laplaciano, se presenta a partir de la relación parte-todo, utilizando el cálculo de probabilidades teóricas.

En ambos casos, se pretende que el trabajo favorezca la argumentación basada en datos empíricos y apunte a la comprensión de la gran masa de información numérica que hoy se recibe a través de distintos medios.

ACTIVIDAD 22

Parte I

a) A veces, al tener que presentarse frente a una situación de examen, es común realizar un punteo o esquema de lo más importante y que nos interesa recordar. ¿Qué pondrías en el correspondiente a esta Unidad?

b) Realizá un Glosario con los términos que necesitás recuperar.

Parte II

Como en las otras unidades, te recomendamos que identifiques dificultades y fortalezas en relación con el uso de los contenidos matemáticos abordados. En tal sentido, reflexionando acerca de tu desempeño, ¿en relación con qué considerás necesario seguir trabajando?

Caso 2

1. Grandes diferencias en el crecimiento de la población

1.1. Presentación del caso

Bajo las cifras de crecimiento del conjunto de la Tierra se esconden grandes diferencias de ritmos de crecimiento y de situaciones de población.

ACTIVIDAD 1

Para entrar en tema: lean el texto y respondan las preguntas formuladas a continuación

Población humana

En los países desarrollados, el crecimiento de la población se ha frenado mucho en las últimas décadas; en ninguno de ellos se llega a un índice de fecundidad de 2,1, y en algunas regiones está por debajo del 1, lo que indica que si continua así, empezarán a disminuir su población muy pronto. Esto se refleja en las pirámides de población de estos países con bases estrechas y cimas anchas que significan que la proporción de jóvenes en estas sociedades irá disminuyendo. En la actualidad, mientras la media mundial de la relación entre menores de 15 años y mayores de 64 años es de 32/6, en Europa es de 19/14.

En los países no desarrollados la situación es totalmente distinta. El 90% del crecimiento de la población del mundo ocurre en estos países que tienen índices defecundidad de entre 2,5 y 6. Dentro de esos países las situaciones son también muy diferentes. Los índices de natalidad más elevados son los de África con un 5,8 de media. Varios países africanos, casi todos los de Iberoamérica y muchos de Asia han disminuido muy notablemente sus índices en los últimos años y se han situado en valores de entre 2,5 y 4,5. Países muy poblados, como la India, que se han situado en el 3,9 o Brasil, en 2,6, siguen descendiendo. China, Tailandia, Corea, Argentina, Chile, están acercándose a los valores de los países occidentales y otros –como Japón, Corea del Sur o Taiwán–, están ya por debajo de la tasa 2,1 de renovación de generaciones.

Recuperado de http://www4.tecnun.es/asignaturas/Ecologia/Hipertexto/14PolEcSoc/120PobHum.htm

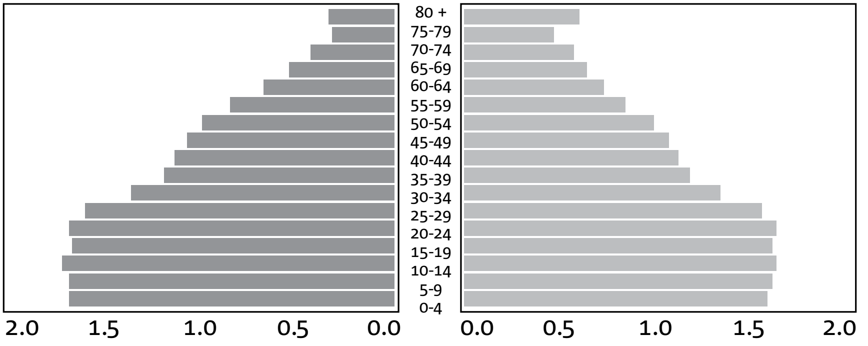
a) ¿En qué tipo de países se da principalmente el crecimiento de la población mundial?

b) Respecto de lo que se preveía, ¿cómo se ha comportado el ritmo de crecimiento de la población humana en los últimos tiempos?

c) ¿Qué puede inferirse respecto de lo que ocurrirá muy pronto en los países desarrollados?

Para avanzar en la comprensión y análisis de la información numérica del texto anterior consideren los gráficos siguientes, que les permitirán comparar la cuestión del crecimiento de la población de Argentina con la de un país desarrollado muy ligado al nuestro, España. Las pirámides de población muestran la composición por edades de la población.

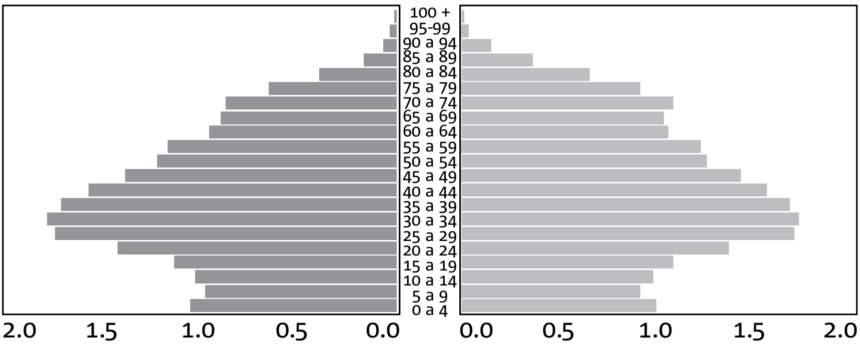
Varones **Población Argentina en 2004** **Mujeres**



Población (en millones)

Fuente: US Census Bureau, International Data Base

Varones **Población Española en 2004** **Mujeres**



Población (en millones)

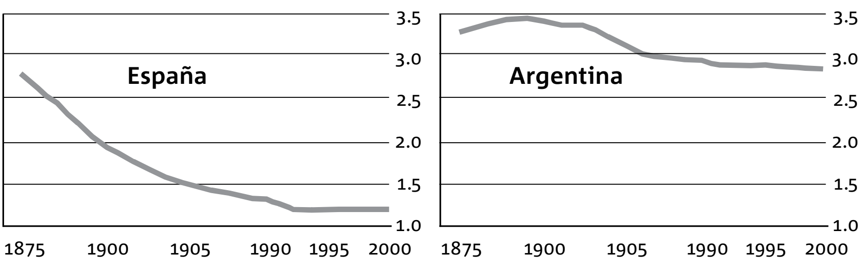
Fuente: US Census Bureau, International Data Base

Índice de fecundidad

El índice de fecundidad es otro de los valores que permite comparar la población de ambos países, analizando el ritmo de crecimiento.

Este índice, también llamado "tasa media de fecundidad" se obtiene calculando primero el número de hijos por mujer que han tenido las mujeres de 15 años, las de 16, las de 17… hasta las de 45 años (se asume que la edad reproductora es de 15 a 45 años). Esto se calcula, para cada edad, haciendo un promedio que se obtiene dividiendo el total de hijos que han tenido esas mujeres por el total de mujeres. Se suman todos esos valores y resulta el número de hijos que tendría la mujer, que teóricamente se comportara a lo largo de toda su vida reproductora como lo han hecho las españolas ese año. Ese número es el índice de fecundidad. La tasa media

Evolución del número promedio de hijos por mujer



de fecundidad es de 2,68 a nivel mundial y los valores extremos corresponden a Níger, con 8 hijos por mujer, y a Bulgaria, con 1,10.

1.2. Consignas de trabajo

ACTIVIDAD 2

Para resolver individualmente.

Analizá las pirámides de población y respondé las preguntas formuladas considerando los datos que allí aparecen.

a) Es verdadera o falsa la siguiente afirmación: “En España se observa un envejecimiento de la población”.

b) ¿Podrías mencionar algún problema concreto que pueda producir este envejecimiento?

c) ¿Es verdadera o falsa la siguiente afirmación? ¿Por qué?

“La Argentina presenta en el año 2004 una estructura por edad y sexo envejecida, en la que el porcentaje de personas adultas mayores es elevado mientras que el porcentaje de niños y jóvenes es relativamente moderado”.

ACTIVIDAD 3

Para resolver en grupos:

a) ¿Cuál ha sido aproximadamente el índice de fecundidad de las mujeres españolas y de las argentinas en 1975 y en 2000 respectivamente?

b) Como habrán observado, en ambos casos es decreciente pero ¿qué pueden decir comparando a ambos países? ¿Y considerando la información entre cuadros y curvas?

c) El índice de fecundidad es un valor. Es necesario recordar que un mismo valor puede haber resultado de trabajar con distintos conjuntos de datos o distintos parámetros estadísticos. Discutan diferentes posibilidades en relación con el índice de fecundidad. Escriban sus conclusiones, argumentando su respuesta.

Bibliografía

Altman, S., Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2003). *Matemática 1. Funciones 1*. Buenos Aires: Longseller.

Altman, S., Comparatore, C. y Kurzrok, L. (2003). *Matemática 2. Funciones 2*. Buenos Aires: Longseller.

Azar, G. (dir.) (2014). *Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado*. Recuperado de http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/matematica-cuadratica.pdf

Benegas, M. (2006). *Matemática. N*úmeros racionales. Col. Aportes para la enseñanza. Nivel medio. Recuperado de http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/pdf/media/matematica_aportesme dia.pdf

Charlot, B. (junio 2008). La relación de los alumnos con el saber y con la escuela. Conferencia dictada en el *IV Congreso de Educación*, Montevideo. Recuperado de https://www.google.com.ar/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=2&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjdzffb4Y_QAhWKlZAKHclgA2IQFgggMAE&url=http%3A%2F%2Fwww.fumtep.edu.uy%2Findex.php%2Fquehacer-ed%2Fitem%2Fdownload%2F234_30500d532f18b26d1cb2cef1db471335&usg=AFQjCNGmsRAdaJxFuvYME9hl0EfEmmXFqg&bvm=bv.137904068,d.Y2I

Charlot, B. (2008). Fracaso escolar. Conferencia dictada en el *Seminario Internacional de IIPE/UNESCO*, Buenos Aires. Recuperado de https://paraeducar.wordpress.com/2010/05/19/fracaso-escolar-conferencia-b-charlot-2008/.

Duval, R. (2012). Preguntas y desafíos de la educación matemática para todos. Conferencia dictada en el *IV Coloquio Internacional sobre enseñanza de las Matemáticas,* Lima. Recuperado de http://educast.pucp.edu.pe/video/1111/vi_coloquio_internacional_sobre_ensenanza_de_las_ma tematicas__dr_raymond_duval_francia

COLECCIÓN MORRAL DE APUNTES

MA

Quienes formamos parte de la UNPAZ estamos convencidos de que la Universidad debe ser inclusiva, entendiendo la inclusión no solo como el hecho de dar la posibilidad de que ustedes hoy ingresen a una carrera sino también con la responsabilidad que tenemos de utilizar todas nuestras energías para que puedan graduarse en un plazo razonable, de acuerdo al programa de cada carrera. Responsabilidad que, por supuesto, es compartida por autoridades, docentes y estudiantes. Solo así, aportando cada uno su granito de arena, podremos garantizar su derecho a la Educación Superior y el de la comunidad a beneficiarse del conocimiento de los profesionales (¡ustedes!) que, con su esfuerzo, contribuyó a formar.

[de la Carta de bienvenida del Rector de la UNPAZ]

ISBN 978-987-4110-02-2

EDUNPAZ
Editorial Universitaria

UNPAZ
Universidad Nacional de José C. Paz